

Investigaciones

Astronómicas

Análisis de los Eclipses

de

Friedrich Wilhelm Bessel

Astronomische
Untersuchungen

Analyse der Finsternisse

Von

Friedrich Wilhelm Bessel

Zweiter Band

KÖNIGSBERG in PR. 1842

IM VERLAGE DER GEBRÜDER BORNTÄGER.

Traducido al español por Lic. Fernando T. de Gorocica
Villa Gesell, Junio 2023

Contenidos - Libro segundo

Tratado X - Análisis de los Eclipses

Introducción 3

Primera sección

Ecuaciones Básicas para el Análisis de los Eclipses 16

Segunda sección

Análisis de los Eclipses para la Tierra en General..... 32

Ejercicio 1. Determinar en un tiempo dado la línea curva sobre la Tierra en la que se ve el contacto de los limbos de dos astros esféricos..... 35

Ejercicio 2. Determinar las horas del primer y último contacto de los limbos de la Luna y del Sol en el horizonte, y también los puntos sobre la Tierra donde se ven este primer y último contacto 93

Ejercicio 3. Determinar en un tiempo dado el punto sobre la superficie de la Tierra donde se ve el contacto de los limbos de la Luna y del Sol en el horizonte..... 104

Ejercicio 4. Determinar los puntos sobre la Tierra donde, en un instante dado, se verá el contacto circular (del Sol y de la Luna) como el máximo del eclipse..... 111

Ejercicio 5. Determinar la ruta del eclipse central sobre la Tierra y las horas de su comienzo y finalización 137

Tercera sección

Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra..... 155

Cuarta sección

Aplicación de las Observaciones de los Eclipses 177

Tratado XI

Una herramienta para facilitar las observaciones de los eclipses solares y ocultaciones.. 214

Tratado XIII

Observación del eclipse solar anular del 15 de mayo de 1836 217

Enlaces

Bibliografía & Enlaces..... 230

Tratado X

Análisis de los Eclipses

Introducción.

El siguiente tratado está dedicado a la teoría de los fenómenos que se presentan en varios puntos de la Tierra, cuando su movimiento relativo y el de dos cuerpos celestes lleva a entre ellos a los (puntos) más cercanos y a los más distantes; una teoría que a menudo, quizás más que cualquier otra, ha despertado los esfuerzos de astrónomos y geómetras. Después de tantos trabajos anteriores, el mío necesita una introducción que muestre lo que aquellos dejaban que desear.

Cualquier teoría de los eclipses debe partir de la condición de que los limbos de dos astros, cuyas magnitudes se dan, se tocan; por lo tanto, si ha de desarrollarse analíticamente, a partir de la ecuación entre las posiciones de los centros de los dos astros y el ojo, que es la expresión de esta condición. Presentaré, pues, los diversos modos de expresión empleados, comenzando por el contenido en el conocido **método de proyección de eclipses**.

Si el Sol se proyecta, desde cualquier punto de vista sobre la Tierra, siguiendo el movimiento diario, sobre un plano perpendicular a la línea que une los centros de aquél y de la Tierra, y (pasa) por el centro de la Luna, así este diseño (croquis) muestra el centro del Sol movido en la misma curva en que el punto de vista desde él parece moverse; el centro de la Luna (también se muestra) donde realmente está.

El diseño muestra al Sol y a la Luna mismos como elipses, producidas por las secciones en el plano de proyección y por los conos que los

Introducción

rodean, cuyos vértices se encuentran en el punto de vista; pero cuyas elipses son apenas diferentes a los círculos mayores de las dos esferas (Sol y Luna), la primera de las cuales está rodeada por el cono que rodea al Sol, mientras que su centro está en el plano de proyección, y la otra de las cuales es la Luna misma. Este diseño corresponde perfectamente a la apariencia del Sol y de la Luna en el cielo: la condición de que los limbos de ambos astros se toquen se expresa así en el diseño, por lo que la distancia medida en él se corrobora simultáneamente, la suma (o la diferencia) del radio del Sol y de la Luna dibujados en el plano de proyección.

Aprovecho esta oportunidad para decir algunas palabras sobre la variedad de formas en que se proyectan los eclipses solares. La que **Flamsteed** dio a conocer en **1680 (I)** es una aproximación de la aquí explicada; diferenciándose de ella por sustituir la proyección ortográfica del paralelo del punto de vista, en lugar de la perspectiva de su movimiento, y por cuantificar la esfera del Sol desde el centro de la Tierra en lugar de desde el punto de vista (topocéntrica). Esto hace que sea más fácil de realizar sin volverse tan incorrecta de que tal (forma) no deba utilizarse cuando solo se requiere de una aproximación. **Flamsteed** cede el honor de su primer invento al famoso maestro de obras **Sir Christopher Wren**, quien, sin embargo, nunca publicó nada al respecto; la de **Domenico Cassini** también fue derivada a ella, probablemente por sus propios esfuerzos. Más tarde, **Lambert** utilizó la propiedad de la proyección estereográfica para representar cada círculo (de los astros) como un círculo, evitando así el dibujo de la elipse, que el diseño ortográfico del paralelo lo es **(II)**. **Lagrange** ha dado una construcción ingeniosa **(III)** mediante la cual la visión de **Flamsteed** se modifica de tal manera que muestra la distancia en la que aparecen los centros del Sol y de la Luna desde el punto de vista; pero nada se gana con esto para el diseño de los eclipses, ya que también requeriría el uso del radio aparente de la Luna, que no es más fácil de obtener como el radio

Introducción

del diseño del Sol asumido en el método anterior de proyección desde este punto de vista.

Si uno quisiera aplicar la construcción de **Lagrange** a las ocultaciones de estrellas fijas, solo se volvería realmente válida a través de su conexión con el radio aparente de la Luna, ya que la visión de **Flamsteed** es directa. Otra expresión de la condición del contacto del limbo es aquella siguiendo completamente las apariencias, a saber, que las distancias de las ubicaciones aparentes de los centros del Sol y de la Luna sean iguales a la suma (o a la diferencia) de sus radios aparentes. Esta expresión (idea) ha sido seguida con mayor frecuencia, incluso en los últimos tiempos. Dado que las magnitudes aparentes que en ella se utilizan sólo se pueden encontrar mediante el cálculo, (y) para cada caso en particular, no puede ser la base de una teoría general de los eclipses. Los astrónomos, sin embargo, han facilitado su aplicación, al asumir la posición geocéntrica y el radio del Sol en lugar de las (cantidades) aparentes, pero utilizando en el cálculo la diferencia en las paralajes horizontales de la Luna y del Sol en lugar de la primera; por lo que su resultado no puede tener un error de más de unas pocas centésimas de segundo.

Lagrange tiene la tercera idea de la misma condición en el importante tratado, en el que primero da la geometría analítica aplicada a la **teoría de los eclipses (IV)**. Procede de la ecuación que requiere que las distancias de las posiciones aparentes de las estrellas sean iguales a la suma (o diferencia) de los radios aparentes; pero se deshace de estas magnitudes aparentes introduciendo en su lugar magnitudes relativas al centro de la Tierra. Para dar a la ecuación, que contiene sólo tales magnitudes, la forma más simple en que **Lagrange** la representa, fueron necesarios varios descuidos, que él prueba, (y) que afectan poco a las aplicaciones, pero que, sin embargo, despiertan el deseo de que se encuentre un medio de dar rigor geométrico con la misma simplicidad a una

Introducción

ecuación que se convertirá en la base de cualquier análisis posterior de los eclipses. Si el inmortal geómetra, a quien debemos el tratado citado, no hubiera pretendido poner a la luz de un ejemplo las herramientas de la geometría analítica, sino que sólo hubiera querido obtener su ecuación fundamental para el análisis de los eclipses, lo podría haber deducido de la proyección explicada anteriormente, que en realidad no es más que la representación gráfica de esta ecuación. **Dionis du Sejour** llegó a la ecuación básica de esta manera **(V)**.

El **análisis de los eclipses** contenido en el siguiente tratado parte de una ecuación que combina la corrección geométrica con la mayor sencillez. Esta ecuación no es más que la expresión de la condición de que el ojo debe estar en una u otra de las dos superficies que rodean ambas luminarias, para ver un contacto exterior o interior de sus limbos: siempre que las luminarias sean esferas, entonces es la **ecuación del cono recto**. -Como esto sólo aparece en su forma más simple, si uno de los ejes de las coordenadas rectangulares se toma paralelo al eje del cono, se determina así la dirección de ese eje, siendo la misma en la que uno de los dos astros se parece a la del otro. Después de deducir esta dirección, así como el ángulo que produce el cono y la ubicación de su vértice, de las ubicaciones y radios de ambos astros, sólo se considera la ubicación de uno de ellos, lo que simplifica enormemente el análisis de la condición del contacto de los limbos. La **primera sección** del siguiente tratado contiene todo lo necesario para la invención de las cantidades presentadas en la **ecuación básica** de este análisis. Le agrego la observación de que todas las tareas que conciernen a la posición mutua de dos cuerpos celestes que están sujetos a la influencia de sus paralajes, obtuvieron su resolución más simple cuando sus lugares geométricos se refieren al punto de la esfera celeste que marca la dirección de uno a otro; cuyo punto es aquel donde se cortan los círculos mayores (Sol y Luna), trazado a través de las

Introducción

posiciones de los astros vistas desde cualquier punto dado. Observo además que una proyección de la Luna y el movimiento del punto de vista, desde el vértice del cono de sombra lunar a cualquier plano, determina perfectamente los tiempos de los contactos de los limbos; por ejemplo en el plano, perpendicular al eje del cono, a través del centro de la Tierra, en el cual la Luna aparece como un círculo, el paralelo como una elipse; o en el plano del **ecuador** de la Tierra, en el que la Luna se convierte en la elipse, el paralelo en el círculo.

Después de obtener la **verdadera ecuación básica del análisis de los eclipses**, también se puede buscar una verdadera resolución de las tareas que conciernen al curso de un eclipse en toda la Tierra. Esta resolución no tiene dificultad si se alteran los problemas considerando de que la Tierra es esférica; se vuelve aún más corto si se supone un **cilindro** en lugar de un **cono de sombra lunar**. A lo que entonces se reduce, (y) lo tengo enumerado al comienzo del apartado **§ 32**. La solución de las tareas así facilitadas se conoce desde hace mucho tiempo, y también se ha utilizado habitualmente para conocer las líneas de la Tierra sobre las que cabía esperar uno u otro tipo de aparición de un eclipse solar inminente. Estas líneas se han representado con frecuencia en los mapas de la Tierra, que dan una visión general de la forma en que un eclipse se manifestará en la Tierra, y también pueden tener el beneficio de mostrar los puntos donde las observaciones del eclipse serán más beneficiosas para una u otra finalidad a la que puede destinarse. Tales representaciones son tenidas en los **Tránsitos de Venus** a través del Sol eligiendo los lugares a donde fueron los astrónomos que pretendían observar estos fenómenos en los años **1761** y **1769**. —Si las líneas mencionadas se buscan sólo para este propósito, los errores de uno o algunos grados en sus rasgos parecen insignificantes; tanto más cuanto que nunca se encontrará aconsejable elegir un sitio de observación muy cerca de la frontera

Introducción

donde la apariencia para ser percibida deja de ser visible. Las incertidumbres de los elementos de un eclipse, que todavía existen en el estado actual de la astronomía, también se oponen a la consecución de un éxito que garantice una o algunas décimas de grado. Soy de la opinión, por lo tanto, de que cualquier incremento de trabajo que sea necesario para conocer los puntos de estas líneas con mayor precisión de lo que se desprende de la resolución de los problemas simplificados, no puede justificarse por su utilidad; por lo tanto, también un intento de determinarlos, sea precisamente apropiado para los elementos dados de un eclipse, solo puede ser realizado por la literatura matemática de la tarea misma. Pero este interés no puede satisfacerse mediante la aplicación del método general de mejorar gradualmente una aproximación inicial; cuya aplicación encuentra su recompensa sólo en su resultado; en el presente caso, por tanto, en un resultado cuyo valor es al menos dudoso.

He buscado soluciones estrictamente correctas y directas a los problemas relacionados con todo el curso de los eclipses. La segunda sección del tratado tiene como objetivo encontrar los puntos de la Tierra donde se percibe el contacto marginal de dos astros en un instante dado según el primer meridiano; como también para marcar aquellos de estos puntos que pertenecen a los límites del área donde la oscuridad es visible; y, por último, determinar los límites del tiempo, tanto de su visibilidad como la del lugar donde se producen las circunstancias particulares del mismo. —Dado que las expresiones de las ubicaciones de los astros en cuestión son funciones trascendentales del tiempo, los tiempos buscados solo pueden determinarse mediante ecuaciones trascendentales: el análisis del problema debe representar estas ecuaciones puramente y afirmar cualquier propiedad existente que guíe su resolución. *Los puntos de la curva sobre la Tierra en los que los contactos de los limbos son visibles en un instante dado están determinados por una*

Introducción

ecuación cuadrática. El área donde se hace visible un eclipse está delimitado por dos tipos diferentes de curvas, una de las cuales conecta los puntos donde el ascenso (contacto en la salida del Sol) o descenso (contacto en la puesta del Sol) del punto de contacto hace que desaparezca su visibilidad, el otro los puntos donde los limbos se contactan es el máximo del eclipse (máximo en la salida y en la puesta del Sol). Cada una de estas curvas puede estar completamente conectada o puede constar de dos partes separadas; en el caso de los **tránsitos de los planetas interiores** por el Sol (Mercurio y Venus), sólo suele estar presente la primera. Los puntos de esta primera curva están determinados por una ecuación de **4º grado**, que aparece en la forma cuya descomposición en dos factores de segundo grado están dados (y) describo en el primer volumen de esta obra, **Tratado VI** apartado **§ 10**. Esta descomposición, combinada con la misma transformación, por la que **Gauss** en su famoso tratado: *Determinatio attractionis etc...* considera el problema astronómico, y **Jacobi** resolviendo problemas geométricos difíciles, ha proporcionado los medios necesarios para la determinación completa de los puntos de la primera curva. Por otra parte, los puntos de la segunda curva pertenecientes a tiempos dados están determinados por una ecuación de sexto grado, cuya naturaleza, sin embargo, hace bastante fácil su solución. —No quise ampliar la segunda sección, que ya ocupa casi las dos terceras partes de todo el tratado, pero de la que probablemente sólo se utilizará el contenido en el apartado **§ 32**, y por lo tanto sólo continué tareas que, aunque quizás no son las únicas interesantes, sino aquellas cuya resolución fue necesaria para alcanzar el objetivo pretendido antes reseñado. Además de lo expuesto, esta sección también contiene la determinación de la curva en la que se ve centralmente el eclipse (total, anular o híbrido).

La determinación de los eclipses contenida en la **tercera sección** para los puntos dados de la Tierra, está libre de la dificultad de que

Introducción

la excentricidad de los meridianos de la Tierra trae a la resolución todos los problemas por los cuales los puntos deben determinarse, qué contacto marginal, o que circunstancias especiales que lo acompañan, se hacen evidentes; pero requiere la solución de una ecuación trascendental, que se logra aquí mediante un procedimiento que evoluciona rápidamente. En la práctica, se requiere mucho menos; es decir, sólo una predeterminación aproximada de los tiempos y de los lugares del comienzo y el final de un eclipse, con suficiente precisión para dirigir adecuadamente la atención de cualquier observador, dondequiera que esté. La aproximación, suficientemente pequeña para esto, se puede obtener mediante un pequeño cálculo con cuatro decimales de los logaritmos, siempre que las efemérides den, para cada eclipse, algunos números utilizados en los cálculos para todos los puntos de observación. Desde la primera publicación de este trabajo, que antes faltaba y que promovía el éxito de las observaciones, el **Prof. Encke** ha dado los números (cantidades), que asume en el anuario astronómico, para todos los (tránsitos) que ocurren en el Sol, las ocultaciones de los planetas y de las estrellas fijas.

La **cuarta sección** trata de la aplicación de las observaciones de los eclipses; de un tema cuya importancia para la astronomía práctica justifica el gusto especial que siempre ha atraído. Los numerosos cálculos que se han llevado a cabo para determinar las diferencias con el mediodía de los puntos de observación mediante observaciones de eclipses solares, ocultaciones y pasos (tránsitos) de los planetas interiores a través del Sol han seguido, quizás con algunas excepciones, un método que corresponde al curso de los acontecimientos revelado al observador que se mantiene fiel a la apariencia. Presupone como conocidos las verdaderas posiciones (ubicaciones) de los astros, tal como las tablas o efemérides las dan para el tiempo (instante) de observación referido al primer meridiano (de París); luego, por cálculo, determina sus radios

Introducción

aparentes, sus distancias aparentes a los polos y sus paralajes en el sentido del ángulo en el polo; además, en el triángulo esférico entre el polo y los centros de los dos astros, cuyos lados ya se conocen, buscar el ángulo en el polo, el cual, añadiéndole la influencia (cantidades) de las paralajes, se transforma en un ángulo geocéntrico similar; esto es, combinado con la velocidad de su cambio, tomado de las **Tablas o de las Efemérides**, conduce al conocimiento del intervalo entre los momentos de observación y el encuentro de los dos astros, y por lo tanto a la expresión de este último instante en relación con el meridiano del lugar de observación. —Este método fue desarrollado por **Lalande (VI)**, y de manera más completa y sencilla por **Bohnenberger (VII)**, quienes asumen la eclíptica del polo mencionado y por lo tanto entienden el tiempo del encuentro como el tiempo en que ambos astros tienen la misma longitud. **Gerstner** relacionó las reglas de cálculo con el polo del **ecuador**, por lo que también consideró el instante en que ambos astros tienen la misma ascensión recta **(VIII)**. **Carlini**, sin embargo, mejoró significativamente este método para el caso de su aplicación a las nuevas ocultaciones de las estrellas fijas **(IX)** al prescribir que las paralajes no deben calcularse para la ubicación real del centro de la Luna, sino para la ubicación aparente donde se encuentra la estrella que toca su limbo (lunar), por ejemplo para la ubicación de la estrella misma. Esta regla evita encontrar el radio aparente y la longitud verdadera de la Luna. -Los múltiples esfuerzos existentes para hacer más flexibles las fórmulas que expresan los efectos de la paralaje también deben contarse entre los impulsados por este método.

El método de cálculo que acabamos de describir tiene la imperfección de que requiere la longitud, la latitud y la paralaje horizontal de los astros para el tiempo del primer meridiano correspondiente al tiempo de observación, mientras que esto sólo se conoce después de la determinación de la diferencia con el

Introducción

mediodía buscada por la observación. Solo daría el verdadero resultado de una observación si las influencias de un error en la diferencia con el mediodía supuestamente conocida sobre todo lo que depende de ella, se siguieran hasta el final del cálculo, que, sin embargo, especialmente sin la mejora exigida por **Carlini**, el cálculo aumentaría no despreciablemente. Además, tiene la imperfección de que, cuando ambos astros tienen paralaje, requiere un cálculo doble o un descuido, aunque no grande. Finalmente, las influencias de pequeños vagos cambios en los elementos en los que se basa el cálculo no se han desarrollado completamente.

Las pretensiones de aplicación son mucho mayores que las que habría tenido este método que el desarrollado por **Lagrange (X)**, sin embargo, uno buscaría en vano una razón defendible si el descuido hubiera tenido lugar. Se basa en la ecuación, que contiene solo datos geocéntricos y determina el contacto de los limbos, y deriva una solución directa de la tarea a partir de esto. El mismo **Lagrange** lo desarrolla de tal manera que el tiempo de la misma longitud de los dos astros aparece como su magnitud desconocida. El astuto **Claussen** es, hasta donde yo sé, el primero en apreciar los méritos de una visión similar del problema, y en haber escrito un ensayo sobre el mismo, en el que convierte el instante de la distancia geocéntrica más pequeña en una cantidad desconocida **(XI)**. También seguí este punto de vista en la **cuarta sección** del tratado. Partí de la ecuación que expresa la condición de los contactos de los limbos; de la misma, de la cual proceden todas las resoluciones dadas en este tratado.

Esta ecuación tiene la ventaja esencial de no contener las coordenadas del astro más lejano, después de haber trasladado su influencia a los elementos del eclipse; la consecuencia de esto es que el caso más complejo, en el que ambos astros muestran radios y paralajes, se reduce al más simple, en el que se trata de una estrella

Introducción

fija, salvo una diferencia que aquí no es muy evidente; de modo que las observaciones de los eclipses en ambos casos pueden calcularse según la regla apropiada al último, sin perder nada de la perfecta precisión de la ecuación básica por esta contracción de los dos astros.

He convertido la diferencia con el mediodía del sitio de observación en una variable desconocida y he desarrollado la solución de la ecuación de tal manera que no requiere la reducción de la observación del tiempo sideral al tiempo solar, o viceversa, y por lo tanto no asume la diferencia con el mediodía a ser conocida. Las influencias de pequeños cambios indefinidos en los elementos de detección los he podido indicar fácilmente por completo y en las conexiones en que se expresan en un eclipse.

Los eclipses son siempre vistos como apariencias, que no experimentan la influencia de la refracción. Pero **Hansen** ha señalado que realmente no están libres de esta influencia, aunque en su mayoría es muy pequeña (**XII**); lo cual, sin embargo, no disminuye el interés de la observación. Cualquier rayo que alcance el ojo, sin su refracción, pasaría sobre él y se cruzaría con la línea de plomada donde la asíntota de su camino tortuoso realmente la cruza; el enfoque del limbo visible en un punto de la Tierra es, por lo tanto, el que pertenece a ese punto, por lo que la liberación de su observación de la influencia de la refracción se logra moviendo el lugar de observación a ese punto. Si el lugar de observación está sobre la superficie del **esferoide de revolución**, que se ha tomado como el de la Tierra, su elevación es evidentemente adicional a la producida por la refracción; que su influencia, que no siempre debe pasar desapercibida en los cálculos precisos, se debió principalmente, hasta donde yo recuerdo, al **Prof. Gerling (XIII)**.

Introducción

De qué manera, en el cálculo de las observaciones de los eclipses, se debe tener en cuenta la refracción de los rayos y la elevación del sitio de observación, se da al final de la **cuarta sección**. Los problemas resueltos en la **segunda sección**, que versan sobre el curso de un eclipse sobre la Tierra en general, no pueden tener en cuenta las elevaciones de los puntos de la superficie física de la Tierra, ya que éstas no siguen ninguna ley; pero podrían tener en cuenta el aumento resultante de la refracción de los rayos, en que, en lugar de las coordenadas de los puntos de la superficie elipsoidal, que se supondría que pertenecen a los puntos donde las asíntotas de los rayos que llegan en la dirección del eje del cono de sombra lunar, se encuentran con las diversas líneas de plomada. Estos puntos están determinados por la ley de la refracción, que, sin embargo, es demasiado imprecisa para no plantear dificultades insuperables en el camino de su búsqueda directa. Evitar estas dificultades mediante la obtención indirecta de resultados numéricos, sin embargo, de acuerdo con la observación ya hecha anteriormente sobre el valor de tales resultados, no tendría ningún propósito; cuanto menos, ya que no se puede tener en cuenta la influencia de las irregularidades de la superficie terrestre, que suele ser mayor que la de la refracción de los rayos, debe de tenerse en cuenta la dependencia de las más letales de las lecturas (desconocidas) del barómetro y del termómetro también deben pasar desapercibidas.

Por lo tanto, solo he considerado las pequeñas influencias de la refracción en la **cuarta sección**. Sobre todo el tratado, observo que he usado todas las reglas de las tres primeras secciones en un ejemplo continuo, del que pensé que podría prescindir en la cuarta. Por esto, y por las explicaciones de las peculiaridades de varios casos del eclipse, el tratado ha crecido mucho más allá del espacio que se habría requerido para presentar el curso de las consideraciones matemáticas seguidas en él. Si no hubiera querido evitar una

Introducción

extensión aún mayor, me hubiera embarcado en la especial consideración de dos casos en los que la relación entre el tamaño de la Tierra y la extensión del cono de sombra lunar que incide sobre ella difiere de la que se produce en los otros tipos de eclipses es tan considerablemente diferente que habría valido la pena afirmar estas diferencias. Uno de estos casos se presenta por los pasos de los planetas interiores a través del Sol, el otro por los contactos internos de los limbos del Sol y de la Luna: en cada caso el tamaño de la Tierra es muy pequeño en comparación con la extensión del cono de sombra lunar que la afecta (incide), en este caso es muy grande, de lo que se pueden sacar beneficios tanto de relaciones como siempre de (beneficios) similares.

Referencias:

- (I) Publicado en un trabajo en la *Historia de la Astronomía del Siglo 18* de Delambre, pág. 03, aunque permaneció desconocido para mí.
- (II) *Contribuciones al uso de las matemáticas*. Tomo II, 2do apartado, pág. 727 &. Berlín 1770.
- (III) *Astronomía Berlinesa*. Año 1781. Pág. 41 y siguientes.
- (IV) *Astronomía Berlinesa*. Año 1782. Pág. 46.
- (V) *Traité Analytique etc.* Tomo I Cap. I. Aunque esta obra no apareció hasta 1786, estaba compuesta por tratados que ya habían sido impresos con anterioridad.
- (VI) *Astronomie*. 3° Edition §. 1970 y siguientes.
- (VII) *Geogr. Ortsbestimmungen*. Göttingen 1795. Pág. 323.
- (VIII) *Astronomía Berlinesa*. Año 1798. Pág. 128.
- (IX) *v. Zach, Monatl. Corresp.* L. XVIII . Pág. 528.
- (X) *Astronomía Berlinesa*. Año 1782. Pág. 46 y siguientes.
- (XI) *Astron. Nachrichten*. Nro. 40.
- (XII) *Astron. Nachrichten*. Nro. 347.
- (XIII) *Astron. Nachrichten*. Nro. 217.

Ecuaciones Básicas para el Análisis de los Eclipses.

§ 1.

Los limbos de dos astros se ven en contacto cuando el ojo está en una u otra de las dos superficies que conforman a ambos astros (por ejemplo la Luna y el Sol). Una de estas superficies se estrecha entre las dos astros (ya que una es más pequeña en todas las direcciones que la otra), la otra seguida de la más pequeña.

Si el ojo está en la primera (superficie), ve el contacto exterior del limbo, en la otra el interior. La dirección en la que aparece el punto de contacto de los limbos es la dirección de la línea recta trazada desde el ojo hasta los cuerpos celestes en la superficie conformada. —La **ecuación básica** del análisis de todos los problemas que pueden provocar los contactos de los limbos de los dos astros no es, pues, otra cosa que la expresión de la condición en que el ojo se encuentra en una u otra de las superficies conformadas.

Se conoce el análisis de la ecuación de las dos superficies que involucran dos cuerpos de cualquier forma; entre otros, **Laplace** lo desarrolla en el **volumen 4** de la “*Mecanique Celeste*” (**Lib. VIII Cap. VII**). Aquí, sin embargo, sólo debe seguirse el caso más simple, el caso en el que ambos astros son esferas, las superficies que las forman son, por lo tanto, conos rectos, cuyas puntas se encuentran en una línea recta que une sus centros. Por lo tanto, lo siguiente tendrá una aplicación inmediata cuando se consideren cuerpos celestes que no tengan una desviación conocida de la forma esférica, como es el caso de la Luna, las estrellas fijas, el Sol y, con la excepción de Júpiter y Saturno, los planetas que tocan los limbos de cada par de estos astros pueden examinarse de acuerdo con las prescripciones que desarrollaré.

La **ecuación básica para el análisis de los eclipses** de dos astros esféricos adquiere su forma más simple cuando se refiere a un sistema de ejes que se cortan en ángulo recto en el centro de la Tierra, uno de los cuales es paralelo a la línea recta que une los centros de los dos astros. Este eje incide (se proyecta) sobre la esfera celeste en un punto **Z**, en el cual el centro del cuerpo celeste más lejano (Sol o estrellas) se ve desde el centro del más cercano, y cuya ascensión recta y declinación designaré por **a** y **d**. Colocaré el segundo eje de tal manera que se encuentre con la esfera celeste en un punto **Y**, que está en el círculo de declinación de **Z**, **90°** al **Norte** de este punto, en ascensión recta **a** y declinación **d + 90°**. El tercer eje debe incidir en un punto **X** de la esfera celeste, que se encuentra a un cuadrante de distancia tanto de **Z** como de **Y**, cuya ascensión recta **+90°** y cuya declinación se anula. Si se designan las coordenadas del cuerpo celeste más cercano (Luna, Mercurio o Venus) relacionado con estos ejes por **z**, **y**, **x**, y del más lejano por **z'**, **y'**, **x'**, la elección del primer eje tiene como consecuencia de que la distancia de un cuerpo celeste del otro, que denotaré por **G**, es la diferencia de las coordenadas (entre) **z** y **z'** y que **y = y'** y **x = x'**. Así que se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} z' - z = G \\ y' - y = 0 \\ x' - x = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

[N.d.T. al español:] de aquí en más, para las funciones trigonométricas utilizaré la notación moderna y sin logaritmos. También para los cálculos y sus fórmulas en notación computacional.

Dado que el eje principal de cada plano trazado a través de los centros de los dos astros es paralelo, estos (ejes) y también la punta del cono de la sombra (lunar), desde cualquier punto del espacio en

el que puedan verse, aparecen en un círculo más grande de la esfera celeste que pasa por el punto **Z**. El centro del astro más distante siempre aparece más cerca del punto **Z**; luego sigue, cuando los limbos se contactan externamente, el vértice del cono y finalmente el centro de la astro más cercano; cuando se tocan internamente, los dos últimos aparecen en orden inverso. El ángulo entre el círculo mayor en el que aparecen estos puntos y el círculo de declinación **ZY**, es el ángulo común de posición de ambos cuerpos celestes en el punto **Z**, que lo denotaré con una **p**. Denotando la distancia desde el punto **Z** en el que aparece el vértice del cono de sombra lunar por **f**, y la distancia de este vértice al ojo por **A**, las proyecciones de este último sobre los tres ejes son:

$$\Delta * \cos f; \Delta * \sin f * \cos p; \Delta * \sin f * \sin p;$$

cuyas proyecciones son también las diferencias de las coordenadas del vértice del cono y del ojo. Entonces, si se denota el primero (el cono de sobre lunar) por **s** y el **y, x** ya escrito para él, y el último (el ojo) por **ζ, η, ξ**, se tienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Delta * \cos f &= s - \zeta \\ \Delta * \sin f * \cos p &= y - \eta \\ \Delta * \sin f * \sin p &= x - \xi \end{aligned}$$

o, después de la eliminación de Δ :

$$\begin{aligned} (s - \zeta) * \tan f * \cos p &= y - \eta \\ (s - \zeta) * \tan f * \sin p &= x - \xi \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

Esto determina el punto en la esfera celeste donde aparece el vértice del cono de sombra lunar. Cuando hay un contacto entre los limbos, aparece en el mismo punto o en el justamente opuesto; el primero es evidente cuando el vértice del cono de sombra lunar está

en la dirección del ojo hacia los astros, el segundo cuando está en la dirección opuesta; es decir, cuando el contacto entre los limbos es uno externo y el otro interno, lo que ocurre en los eclipses anulares, cuando es interno, lo que ocurre en los eclipses totales. Por lo tanto, el contacto del limbo tiene lugar cuando f es igual al ángulo que forma el cono, ángulo que se supone agudo en el primer caso y obtuso en el segundo; o su condición es que f satisfaga las ecuaciones que tienen lugar entre los radios k y k' donde los dos astros sean esféricos, sus distancias entre sí y desde el vértice del cono de sombra lunar, y el ángulo que forma ese cono.

Estas ecuaciones son, para los contactos exteriores, para los cuales $s > z$ y $z' > z$, siendo

$$(s - z) * \sin f = k; (z' - s) * \sin f = k'$$

y para los contactos interiores, para los cuales $s < z$ y $z' < z$, siendo

$$(z - s) * \sin f = k; (z' - s) * \sin f = k'$$

Y sigue que

$$s = (k' * z \pm k * z') / (k' \pm k)$$

$$\sin f = (k' \pm k) / (z' - z) = (k' \pm k) / G \dots\dots\dots (3)$$

donde el signo superior pertenece al (contacto) exterior, el inferior el contacto del limbo interior. Si s y f se asumen de acuerdo con estas expresiones en las ecuaciones (2), entonces estas se convierten en las ecuaciones de condición del contacto entre los limbos. El ángulo de posición p de los dos astros que se tocan es también el ángulo de posición del punto de contacto de sus limbos, o 180° diferentes de él; lo primero o lo segundo, según se deba suponer que el ángulo f es agudo u obtuso, es decir, según que el contacto de los limbos sea uno exterior y otro interior, lo que se produce en el caso de un

eclipse anular, o uno interno que ocurre en el eclipse total. Si se quiere suponer por siempre, se debe agregar la regla a las ecuaciones (2), la regla de que en el caso de un contacto interno con una totalidad sea completa, p no debe entenderse como el ángulo de posición del punto de contacto de los limbos en el punto Z , sino que difiere de él en 180° .

Estas ecuaciones son las ecuaciones básicas para el análisis de todos los problemas que pueden ser causados por el contacto de los limbos de dos astros esféricos. A continuación se mostrará cuán simple se vuelve este análisis, en comparación con investigaciones anteriores sobre el mismo tema, a partir de la forma más simple de las ecuaciones básicas. La introducción del punto Z en consideración, en lo cual se siguen las ecuaciones (2), parece, por lo tanto, como un paso esencial en el que sería necesario para la simplificación de la teoría de los eclipses.

§ 2.

Las magnitudes que aparecen en el apartado anterior (§ 1) las expresaré por las que pueden ser tomadas de las tablas astronómicas o de las efemérides, o que pueden considerarse conocidas de alguna otra manera.

La posición de los ejes de coordenadas asumidos en las ecuaciones (2), o en la determinación de a y d de la que depende, se obtienen de las diferencias en las perpendiculares trazadas por los dos astros en el **ecuador** y en los dos planos perpendiculares a él. Si la distancia del cuerpo celeste más cercano al centro de la Tierra y su ascensión recta geocéntrica y su declinación son denotados por r , α y δ , r' , α' y δ' se aplican en un sentido similar al más (cuerpo) distante (el Sol), a saber:

$$G * \cos d * \cos a = r' * \cos \delta' * \cos \alpha' - r * \cos \delta * \cos \alpha$$

$$G * \cos d * \sin a = r' * \cos \delta' * \sin \alpha' - r * \cos \delta * \sin \alpha$$

$$G * \sin d = r' * \sin \delta' - r * \cos \delta$$

o, expresado más convenientemente para el cálculo:

$$g * \cos d * \cos (a - \alpha') = \cos \delta' - m * \cos \delta * \cos (a - \alpha')$$

$$g * \cos d * \sin (a - \alpha') = -m * \cos \delta * \sin (a - \alpha')$$

$$g * \sin d = \sin \delta' - m * \sin \delta \dots \dots \dots (4)$$

en cuyas fórmulas $r' * g$ se escribe para G y $r' * m$ para r . Después de hallar los a y d necesarios para determinar los puntos Z, Y, X de la esfera celeste o para determinar la posición de los ejes de las coordenadas, los cosenos de las distancias, tanto del cuerpo celeste más cercano (Luna) como del más lejano (Sol), se puede calcular a partir de Z, Y, X , y por lo tanto las coordenadas, expresan lo siguiente:

$$z = r * \{ \sin d * \sin \delta + \cos d * \cos \delta * \cos (\alpha - a) \}$$

$$y = r * \{ \cos d * \sin \delta - \sin d * \cos \delta * \cos (\alpha - a) \}$$

$$x = r * \cos \delta * \sin (\alpha - a) \dots \dots \dots (5)$$

$$z' = r' * \{ \sin d * \sin \delta' + \cos d * \cos \delta' * \cos (\alpha' - a) \}$$

$$y' = r' * \{ \cos d * \sin \delta' - \sin d * \cos \delta' * \cos (\alpha' - a) \}$$

$$x' = r' * \cos \delta' * \sin (\alpha' - a) \dots \dots \dots (6)$$

Otras fórmulas en las que en lugar de r, d, a , la distancia del ojo al centro de la Tierra ρ , su declinación geocéntrica, o la llamada altura polar corregida ϕ' y su ascensión recta, o el tiempo sidereal expresado en partes del círculo que se escribe μ , se tienen en cambio también ζ, η, ξ , a saber:

$$\zeta = \rho * \{ \sin d * \sin \phi' + \cos d * \cos \phi' * \cos (\mu - a) \}$$

$$\eta = \rho * \{ \cos d * \sin \phi' - \sin d * \cos \phi' * \cos (\mu - a) \}$$

$$\xi = \rho * \cos \phi' * \sin (\mu - a) \dots \dots \dots (7)$$

En el cual, $z' = z + G$, $y' = y$, $x' = r'$ y G ya se conoce por la fórmula (4), no es necesario utilizar la fórmula (6) si ya se ha utilizado la (5), o viceversa.

La segunda de las fórmulas (5) (o la (6)) requiere, antes de su aplicación, una nueva modificación, por medio de la cual deja de surgir de la diferencia entre dos cantidades mucho mayores; se la escribe para ello

$$y = r * \{\sin (\delta - d) * \cos ((\alpha - a)^2)/2 + \sin (\delta + d) * \sin ((\alpha - a)^2)/2\}$$

entonces ésta ya no tiene ese inconveniente. La primera fórmula puede, a saber, de manera similar, cambiarse y escribirse

$$z = r * \{\cos (\delta - d) * \cos ((\alpha - a)^2)/2 - \cos (\delta + d) * \sin ((\alpha - a)^2)/2\}$$

Aunque es mejor añadir transformaciones a las expresiones, que tienen por objeto hacerlas aptas para el cálculo (logarítmico), que ver incrementada la extensión de este tratado por sus citas repetidas, y aunque por ello evito tales transformaciones, así como la cita por todos los medios no pretendo dar espacio al cálculo de una fórmula, creo que debo describir aquí una segunda forma de conocer g , a , d , z , y , x . Presupone que debe calcularse la distancia entre las ubicaciones geocéntricas de ambos astros en la esfera celeste = γ , y el ángulo de posición, ya sea del astro más cercano (Luna) al más distante (Sol) = ω' , o del más distante al más cercano = $180^\circ + \omega$, de α , δ , α' , δ' lo que se deduce según las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \sin \gamma/2 * \cos (\omega + \omega')/2 &= \cos (\alpha - \alpha')/2 * \sin (\delta - \delta')/2 \\ \sin \gamma/2 * \sin (\omega + \omega')/2 &= \sin (\alpha - \alpha')/2 * \cos (\delta + \delta')/2 \\ \sin \gamma/2 * \cos (\omega - \omega')/2 &= \cos (\alpha - \alpha')/2 * \cos (\delta - \delta')/2 \end{aligned}$$

$$\sin \gamma/2 * \sin (\omega - \omega')/2 = \sin (\alpha - \alpha')/2 * \sin (\delta + \delta')/2 \dots \dots (8)$$

En el triángulo entre el centro de la Tierra y ambos astros, el ángulo en el centro de la Tierra es = γ , y si se toma el (ángulo) geocéntrico. La distancia del cuerpo celeste más distante (Sol) desde el punto **Z** de la esfera celeste se denota por **c**, el ángulo en el cuerpo celeste más distante = **c**, en el más cercano (Luna) = $180^\circ - \gamma - c$. Así que se tiene

$$\begin{aligned} g * \cos c &= 1 - m * \cos \gamma \\ g * \sin c &= m * \sin \gamma \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} g * \cos (c + \gamma/2) &= (1 - m) * \cos \gamma/2 \\ g * \sin (c + \gamma/2) &= (1 + m) * \sin \gamma/2 \dots \dots \dots (9*) \end{aligned}$$

donde **g** y **c**, y luego **a**, **d** y el ángulo de posición en común de ambos astros (**w**) en el punto **Z**, se obtienen de la forma

$$\begin{aligned} \cos (45^\circ + d/2) * \sin (w + a - \alpha')/2 &= \sin \omega'/2 * \cos (45^\circ + (\delta' + c)/2) \\ \cos (45^\circ + d/2) * \cos (w + a - \alpha')/2 &= \cos \omega'/2 * \cos (45^\circ + (\delta' - c)/2) \\ \sin (45^\circ + d/2) * \sin (w - a + \alpha')/2 &= \sin \omega'/2 * \sin (45^\circ + (\delta' + c)/2) \\ \sin (45^\circ + d/2) * \cos (w - a + \alpha')/2 &= \cos \omega'/2 * \sin (45^\circ + (\delta' - c)/2) \\ \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

son halladas. Expresadas por **r**, **c + γ** , **w**, son :

$$\begin{aligned} z &= r * \cos (c + \gamma) \\ y &= r * \sin (c + \gamma) * \cos w \\ x &= r * \sin (c + \gamma) * \sin w \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

En el caso de la ocultación de una estrella fija, w , a , $d = \omega'$, α' , δ' respectivamente y c desaparece, por lo que en este caso solo las fórmulas (8), y en lugar de (11) son inútiles para aplicar

$$\begin{aligned} z &= r * \cos \gamma \\ y &= r * \sin \gamma * \cos \omega' \\ x &= r * \sin \gamma * \sin \omega' \dots\dots\dots (11*) \end{aligned}$$

§ 3.

La unidad por la cual se miden r , r' , ρ , k , k' es arbitraria; aunque es conveniente expresar cada una de estas cantidades como información habitual propia en las tablas o en las efemérides, para incorporar al cálculo. Si se elige como unidad el radio ecuatorial de la Tierra, entonces los r , r' , k , k' medidos por esta medida han de expresarse por las indicaciones que contienen para ellos las tablas o las efemérides.

Si la Luna es el astro más cercano y su paralaje horizontal ecuatorial se denota por π ; el Sol es el más distante y su distancia r' a la Tierra se expresa por la medida general del sistema planetario (U.A. = Unidad Astronómica), es decir, el valor medio de esta distancia, a la que corresponde la paralaje horizontal ecuatorial Π , entonces en lugar de r y r' de las fórmulas anteriores, se tiene:

$$1 / \sin \Pi \text{ y } r' / \sin \Pi$$

El radio de la Luna, expresado en partes del radio ecuatorial de la Tierra, puede tomarse como inmediato; y si por H se entiende por el radio en que aparece el disco del Sol a la distancia $r' = 1$, entonces esto es lo que ocurre en las fórmulas anteriores

$$k' = \sin H / \sin \Pi$$

Para los eclipses solares se tienen las expresiones de:

$$\begin{aligned}
 r &= 1 / \sin \pi \\
 m &= \sin \Pi / (r' * \sin \pi) \\
 \sin f &= (\sin H \pm k * \sin \Pi) / (r' * g) \\
 s * \tan f &= z * \tan f \pm k / \cos f \dots\dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

El numerador de la expresión de **m** y la parte de la expresión de **sin f** encerrada entre paréntesis son independientes de las circunstancias de cada eclipse solar en particular, y por lo tanto pueden calcularse de una vez por todas para todos los fenómenos de este tipo.

Si se toman por ejemplo **Π = 8,5776"** después del cálculo actualizado de las observaciones de los dos últimos pasos de Venus a través del (disco del) Sol dadas por **Encke**; **k = 0,2725** después de la determinación de **Burckhardts**; **H = 959,788"** según algunos, en el **Schumachers Astr. Nachr N° 228**, luego de estas medidas publicadas por mí, se obtiene:

$$\sin \Pi = \sin (8,5776''/3600) = 0,0000415853783$$

$$[\sin H + k * \sin \Pi] = [\sin (959,788''/3600) + 0,2725 * \sin (8,5776''/3600)]$$

$$[\sin H + k * \sin \Pi] = 0,004660678467 \dots\dots\dots \text{para el contacto exterior}$$

$$[\sin H - k * \sin \Pi] = [\sin (959,788''/3600) - 0,2725 * \sin (8,5776''/3600)]$$

$[\sin H - k * \sin \Pi] = 0,004638014436 \dots$ para el contacto interior

Las hay similares para las ocultaciones lunares de los planetas.

Expresiones en las que, sin embargo, r' es la distancia del planeta a la Tierra y H es el de su radio, visto a la distancia = 1 disco medio.

—Para las **ocultaciones de las estrellas fijas**, los contactos exteriores e interiores coinciden; a y d son la ascensión recta y la declinación de la propia estrella fija eclipsada; m y f desaparecen y en lugar de $(s - \zeta) * \tan f$, en las ecuaciones (2), se usa la cantidad constante k .
 —El producto $s * \tan f$ es el radio del círculo que corta el cono de sombra lunar en el plano perpendicular al eje de s y que pasa por el centro de la Tierra; se denotará por l en lo que sigue.

Para los **tránsitos de los planetas interiores** a través del (disco del) Sol, r y r' , expresados en la medida comúnmente utilizada del sistema planetario (es decir la unidad astronómica), para ser tomada como dada; donde h significa el radio del disco del planeta visto a la distancia = 1

$$\begin{aligned} r &= r / \sin \pi \\ m &= r / r' \\ \sin f &= [\sin H \pm k * \sin h] / (r' * g) \\ s * \tan f &= z * \tan f \pm \sin h / (\cos f * \sin H) \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

En este caso m no es una cantidad pequeña, como ocurría en los casos anteriores; g no es por tanto aproximadamente = 1 , como antes, sino aproximadamente = $1 - m$; el punto Z de la esfera celeste está justo frente (opuesta) de la posición heliocéntrica del planeta que pasa por el Sol.

—En todos los casos, introduciendo en consideración el punto **Z** de la esfera celeste, se consigue que la ubicación del astro eclipsado no se utilice más que para el cálculo de la fórmula (4).

§ 4.

Ilustraré la aplicación de las prescripciones que se encuentran en este tratado con un ejemplo calculado seguidamente, y elegiré el eclipse solar que ocurrió el **15 de mayo de 1836**. Derivé las ubicaciones de la Luna y el Sol de la información que se encuentra en el **Anuario Astronómico de Berlín** de **Encke**, concretamente en lo siguiente:

Ascensión Recta de la Luna:

Día	Hora Obs. Berlín	α	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$
14 Mayo	12 h	38° 57' 12,8"					
15 Mayo	0 h	44° 47' 16,4"	+5° 50' 03,6"				
	12 h	50° 43' 38,8"	+5° 56' 22,4"	+6' 18,8"			
16 Mayo	0 h	56° 46' 56,4"	+6° 03' 17,6"	+6' 55,2"	+36,6"		
	12 h	62° 57' 26,5"	+6° 10' 30,1"	+7' 12,5"	+17,3"	-19,3"	
17 Mayo	0 h	69° 15' 02,5"	+6° 17' 36,0"	+7' 05,9"	-6,6"	-23,9"	-4,6"

$\Delta 1 = \alpha$ (15 May; 0h) - α (14 May; 12h), etc.

Declinación de la Luna:

Día	Hora Obs. Berlín	δ	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$
14 Mayo	12 h	+14° 23' 42,4"					
15 Mayo	0 h	+16° 43' 22,1"	+2° 19' 39,7"				
	12 h	+18° 52' 17,2"	+2° 08' 55,1"	-10' 44,6"			
16 Mayo	0 h	+20° 49' 03,0"	+1° 56' 45,8"	-12' 09,3"	-1' 24,7"		
	12 h	+22° 32' 17,2"	+1° 43' 14,2"	-13 31,6"	-1' 22,3"	+2,4"	
17 Mayo	0 h	+24° 00' 42,8"	+1° 28' 25,6"	-14' 48,6"	-1' 17,0"	+5,3"	+2,9"

Paralaje de la Luna:

Día	Hora Obs. Berlín	π	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$
14 Mayo	12 h	54' 45,1"				
15 Mayo	0 h	54' 35,2"	-9,9"			
	12 h	54' 26,2"	-9,0"	+0,9"		
16 Mayo	0 h	54' 18,3"	-7,9"	+1,1"	+0,2"	

Primera sección. Ecuaciones Básicas para el Análisis de los Eclipses

	12 h	54' 11,6"	-6,7"	+1,2"	+0,1"	
17 Mayo	0 h	54' 06,1"	-5,5"	+1,2"	+0,0"	-0,1

Ascensión Recta del Sol:

Día	Ecuación del Tiempo	Hora Obs. Berlín	α'	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$
14 Mayo	-3m 56,30s	12 h	51° 13' 55,65"			
15 Mayo	-3m 56,08s	12 h	52° 13' 07,35"	+59' 11,70"		
16 Mayo	-3m 55,28s	12 h	52° 12' 27,60"	+59' 20,25"	+8,55"	
17 Mayo	-3m 53,93s	12 h	54° 11' 56,25"	+59' 28,65"	+8,40"	-0,15"

Declinación del Sol:

Día	Ecuación del Tiempo	Hora Obs. Berlín	δ'	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$
14 Mayo	-3m 56,30s	12 h	+18° 41' 46,4"			
15 Mayo	-3m 56,08s	12 h	+18° 56' 02,1"	+14' 15,7"		
16 Mayo	-3m 55,28s	12 h	+19° 09' 58,6"	+13' 56,5"	-19,2"	
17 Mayo	-3m 53,93s	12 h	+19° 23' 35,6"	+13' 37,0"	-19,5"	-0,3"

Distancia Tierra - Sol:

Día	Hora Obs. Berlín	Δ [U.A.]	$\Delta 1$	$\Delta 2$
14 Mayo	12 h	1.011418982		
15 Mayo	12 h	1.011627438	0,0002084560	
16 Mayo	12 h	1.011831277	0,0002038393	-0,00000461
17 Mayo	12 h	1.012030497	0,0001992198	-0,00000461

El tiempo durante el cual el contacto externo de los limbos del Sol y de la Luna fue visible en cualquier parte de la Tierra duró alrededor de **6 horas**, centrado (eclipse medio general) en alrededor de las **14h 11m** hora en el meridiano de París, a partir del cual se supone que el meridiano para cuya hora se calcula la efeméride aplicada está a **11° 03' 30" = 44m 14s** hora hacia el **Este**. Ahora bien, como es conveniente conocer los valores de las diversas cantidades dependientes del tiempo en que la teoría de los eclipses supone conocer, durante la duración del presente eclipse, para tiempos menos lejanos que los contenidos en las efemérides, pasaré primero a deducir esto otro, avanzando de hora en hora, y las posiciones de la Luna y el Sol son para las **12h, 13h, , 18h** la hora media de **Berlín** indica qué hora es **11h 15m 46s, 12h 15m 46s, , 17h 15m**

Primera sección. Ecuaciones Básicas para el Análisis de los Eclipses

46s del primer meridiano (de **París**) **(I)**. La interpolación requerida para esta extensión de las **efemérides de Encke**, a tiempos intermedios más pequeños, se facilita mediante el uso de las tablas de interpolación (logarítmica), por cuyo cálculo **(II)** el profesor **Anger** en **Danzig** lo utilizó (**Astr. Nachr N° 151 S. 128**) y ha cumplido mi deseo expresado. Esta interpolación ha mostrado lo siguiente:

Para la Luna:

Día	Hora 1° Merid. Paris	α	δ	Paralaje
15 Mayo	11h 15m 46s	50° 43' 38,800"	+18° 52' 17,200"	54' 26,200"
"	12h 15m 46s	51° 13' 39,030"	+19° 02' 30,030"	54' 25,499"
"	13h 15m 46s	51° 43' 42,169"	+19° 12' 37,747"	54' 24,804"
"	14h 15m 46s	52° 13' 48,234"	+19° 22' 40,300"	54' 24,118"
"	15h 15m 46s	52° 43' 57,238"	+19° 32' 37,641"	54' 23,440"
"	16h 15m 46s	53° 14' 09,193"	+19° 42' 29,722"	54' 22,769"
"	17h 15m 46s	53° 44' 24,112"	+19° 52' 16,496"	54' 22,106"

[NdT al español] Ej. Si la hora media de Berlín es 12:00:00 h., la hora en el 1° Meridiano de Paris es 11:15:46 h., son 00:44:11 h. menos. Diferencia en longitudes entre Berlín y París (11° 3' 30")/15 = 00:44:11 h. Éstas y todas las efemérides siguientes están calculadas para las 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18 h aunque las horas estén expresadas para la **Hora 1° Merid. Paris**, pero la Hora Sidérea lo está para estas últimas.

Para el Sol:

Día	Hora 1° Merid. Paris	α'	δ'	Δ [U.A.]	Hora Sidérea
15 Mayo	11h 15m 46s	52° 13' 17,067"	18° 56' 04,412"	1.011627438	2h 48m 35,220s
"	12h 15m 46s	52° 15' 45,241"	18° 56' 39,649"	1.011636057	3h 48m 45,076s
"	13h 15m 46s	52° 18' 13,431"	18° 57' 14,854"	1.011644675	4h 48m 54,933s
"	14h 15m 46s	52° 20' 41,635"	18° 57' 50,025"	1.011653061	5h 49m 04,789s
"	15h 15m 46s	52° 23' 09,853"	18° 58' 23,162"	1.011661680	6h 49m 14,645s
"	16h 15m 46s	52° 25' 38,087"	18° 59' 00,266"	1.011670299	7h 49m 24,501s
"	17h 15m 46s	52° 28' 06,335"	18° 59' 35,335"	1.011678918	8h 49m 34,358s

De esta tabla anterior, de acuerdo con las reglas dadas, se obtiene:

Día	Hora 1° Merid. Paris	a	d	g
15 Mayo	11h 15m 46s	52° 13' 31,07"	18° 56' 04,95"	0,997404676
"	12h 15m 46s	52° 15' 54,94"	18° 56' 38,71"	0,997403758
"	13h 15m 46s	52° 18' 18,82"	18° 57' 12,44"	0,997402839
"	14h 15m 46s	52° 20' 42,71"	18° 57' 46,14"	0,997402380
"	15h 15m 46s	52° 23' 06,62"	18° 58' 19,81"	0,997401920
"	16h 15m 46s	52° 25' 30,54"	18° 58' 53,45"	0,997401691
"	17h 15m 46s	52° 27' 54,47"	18° 59' 27,06"	0,997401691

Primera sección. Ecuaciones Básicas para el Análisis de los Eclipses

Además las coordenadas **z**, **y**, **x**:

Día	Hora 1° Merid. París	z	$\Delta 1$	y	$\Delta 1$	$\Delta 2$	x	$\Delta 1$	$\Delta 2$
15 Mayo	11h 15m 46s	63,13459516		-0,063106			-1,562075		
"	12h 15m 46s	63,15814994	0,023554783	+0,110769	0,173875		-1,081439	0,480636	
"	13h 15m 46s	63,17746560	0,019315661	+0,284411	0,173642	-0,000233	-0,600667	0,480772	0,000136
"	14h 15m 46s	63,19245094	0,014985340	+0,457806	0,173395	-0,000247	-0,119791	0,480876	0,000104
"	15h 15m 46s	63,20317565	0,010724702	+0,630942	0,173136	-0,000259	+0,361156	0,480947	0,000071
"	16h 15m 46s	63,20963754	0,006461893	+0,803806	0,172864	-0,000272	+0,842141	0,480985	0,000038
"	17h 15m 46s	63,21180620	0,002168666	+0,976386	0,172580	-0,000284	+1,323130	0,480989	0,000004

Finalmente se obtiene **s * tan f**, **tan f** y **s**, los dos primeros de los cuales los denotaré con **l** e **i** para abreviar:

a) para el contacto exterior de los limbos

Día	Hora 1° Merid, París	l	$\Delta 1$	i	$\Delta 1$	s	$\Delta 1$
15 Mayo	11h 15m 46s	0,564370		0,004622933		122,080331526	
"	12h 15m 46s	0,564477	0,000107	0,004622898	-0,000000035	122,104508550	0,024177024
"	13h 15m 46s	0,564564	0,000087	0,004622863	-0,000000035	122,124247298	0,019738748
"	14h 15m 46s	0,564631	0,000067	0,004622827	-0,000000036	122,139686235	0,015438937
"	15h 15m 46s	0,564678	0,000047	0,004622789	-0,000000037	122,150879981	0,011193746
"	16h 15m 46s	0,564705	0,000027	0,004622751	-0,000000038	122,157855498	0,006975516
"	17h 15m 46s	0,564713	0,000008	0,004622712	-0,000000039	122,160527676	0,002672178

b) para el contacto interior de los limbos

Día	Hora 1° Merid, París	l	$\Delta 1$	i	$\Delta 1$	s	$\Delta 1$
15 Mayo	11h 15m 46s	0,0179460		0,004600470		3,900892659	
"	12h 15m 46s	0,0180520	0,000106	0,004600435	-0,000000035	3,924000012	0,023107352
"	13h 15m 46s	0,0181390	0,000087	0,004600400	-0,000000035	3,942834064	0,018834053
"	14h 15m 46s	0,0182050	0,000066	0,004600364	-0,000000036	3,957382236	0,014548172
"	15h 15m 46s	0,0182520	0,000047	0,004600327	-0,000000037	3,967637625	0,010255389
"	16h 15m 46s	0,0182800	0,000028	0,004600289	-0,000000038	3,973598655	0,005961030
"	17h 15m 46s	0,0182870	0,000007	0,004600250	-0,000000039	3,975264222	0,001665567

Referencias:

- (I) Me gustaría aprovechar esta oportunidad para hacer un comentario sobre el **primer meridiano**. Así llamo el **meridiano de París**, al que me refiero todas las fechas que no tienen una conexión natural con otro

Primera sección. Ecuaciones Básicas para el Análisis de los Eclipses

lugar (como las observaciones directas). En esto sigo la costumbre como en el continente de **Europa**; en el cuál ocurren excepciones, pero no tan inclinado decididamente hacia otro meridiano, que sea dudoso, de cuál de los dos es el más comúnmente empleado. Uno encuentra fechas de fenómenos que no tienen relación con un lugar específico, relacionados con los meridianos de **Altona, Berlín, Güttingen, Milán, Seeberg, Viena** y otros; por ejemplo, los tiempos para los cuales se dan las ubicaciones de los cuerpos celestes en las teorías, tablas o efemérides. Esta diferencia obviamente no es necesaria; no facilita la aplicación general de los datos astronómicos siempre que las diferencias entre otros meridianos y los citados no se conozcan más directamente que desde el de **París**. No creo que este sea el caso hasta el momento; que los índices locales existentes, mar y mapas, etc., estarían preferentemente relacionados con uno de los meridianos enumerados. El hecho de que una elección, en sí bastante arbitraria, se haya desviado hacia un cierto meridiano, lo considero un acontecimiento favorable, cuya ventaja no se debe sacrificar sin razón, como es bien sabido, en otra gran parte del mundo se supone que el meridiano de **Greenwich** es el primero; esa parte encontraría inconveniente un cambio de hábito, por lo que yo, al menos, no podría justificarlo, —Que, desde este punto de vista, nunca podría haber tenido la tentación de agregar un tercero, por ejemplo el de **Königsberg (hoy Kaliningrado)**, es obvio: uno sería el mejor; dos son mejor que tres, etc.

- (II) Tablas para Facilitar el Uso de las **Efemérides Lunares**. Pabellón 1831.

Análisis de los Eclipses para la Tierra en General.

§ 5.

Abriré la presente sección dando cuenta del curso de un eclipse visto desde toda la Tierra. De ahí surgirán las preguntas a las que ha de responder aquella parte de la teoría de los eclipses que no se refiere a (todos) los puntos dados sobre la Tierra. Sólo hablaré del contacto de los limbos en general, sin mencionar separadamente al contacto externo y al interno: lo siguiente se aplica entonces a uno u a otro, según se asuma el cono de sombra lunar correspondiente a uno u otro (contacto).

El cono de sombra del par de astros (del más cercano, es decir de la Luna) se mueve con ellos: en cada uno de sus encuentros geocéntricos hace que su eje (producto cuando sus centros son coincidentes) se acerque al centro de la Tierra a una distancia mínima mayor o menor. Si este mínimo es tan grande que las superficies del cono de sombra lunar y la Tierra no se tocan, entonces no se ve evidentemente ningún contacto de los limbos en la Tierra, o el encuentro de los astros no produce ninguna oscuridad (eclipsado). Cuando las superficies llegan a intersectarse, su línea de intersección en cada punto es la curva sobre la superficie de la Tierra por la cual se produce el contacto de los limbos en (esos) los puntos. Esto se vuelve visible solo en esa parte de la curva donde el punto de contacto de los limbos se encuentra sobre el horizonte.

El contacto del limbo se ve más temprano y más tarde cuando las superficies del cono de sombra lunar y de la Tierra se tocan externamente. En el instante de cada uno de estos (dos) contactos, sólo un punto sobre la Tierra ve el contacto de los limbos de los astros, y la determinación tanto del instante mismo como del punto sobre la Tierra (coordenadas) donde el contacto del limbo es

entonces visible **es el primero de los requisitos** para sentirse satisfecho.

Si el tamaño y el movimiento del cono de sombra lunar son tales que en el curso del eclipse penetra completamente en la Tierra, es decir todo el cono de sombra lunar completo en ella, entonces surgen dos contactos más de las dos superficies (circulares de los astros), por lo que entonces se requiere determinar los tiempos de su contacto y los puntos sobre la Tierra (coordenadas), para determinar cuando éstos suceden, pueden cumplirse por cuatro momentos (instantes), a saber, además de τ y τ' correspondientes a los **contactos exteriores** de ambas superficies, también por τ_1 y la τ_1' pertenecientes a los **(contactos) interiores**.

Evidentemente, dos puntos de la curva cortada entre τ y τ' y entre τ_1 y la τ_1' por la superficie del cono de sombra lunar sobre la Tierra, son tocados por líneas rectas en el primero; sólo la parte de la curva que se encuentra en el lado de los puntos de contacto, en los que se encuentran los dos astros, se ve realmente el contacto del limbo; la otra parte está oculta por el cuerpo que se interpone de la Tierra. Uniendo estos puntos particulares de las curvas de progresión en el tiempo por una línea curva, es la línea en la que se ve el contacto de los limbos mientras el punto de contacto está en el plano del horizonte. Su determinación es el **segundo de los requisitos** a cumplir.

Esta línea evidentemente consta de dos partes separadas: cuando el cono de sombra lunar entra (parcialmente) en la Tierra, o (cuando) entra por completo; dado que entonces si τ_1 y τ_1' se presentan realmente, y durante su intervalo no hay líneas rectas en la superficie del cono de sombra lunar que toquen (la superficie de) la Tierra; por otro lado, si τ_1 y τ_1' no se presentan realmente, es decir,

siempre hay tales líneas (curvas) entre τ y τ' que están completamente conectadas.

Esta línea curva delimita el área sobre la Tierra en el que la oscuridad (parcialidad y totalidad) es visible. Lo limita por dos lados distintos cuando ella misma está compuesta de dos partes distintas; por otro lado, la rodea completamente por un lado si ella misma está completamente conectada (el cono de sombra lunar incidente); el primero (de los dos lados), entonces, cuando τ_1 y la τ_1' realmente existen, el segundo cuando realmente no existen. Donde no lo limita, está rodeada por otra línea en la que los astros no se aproximan más que la suma de sus radios aparentes, o en la que el contacto fronterizo (límbico) es el máximo de eclipse. La determinación de esta línea es **la tercera de las órdenes a cumplir**.

A las limitaciones del tiempo de un eclipse, y del área terrestre en el que es visible, ambos impuestos por el cumplimiento de estos **tres requisitos**, la parte del análisis de los eclipses a tratar en esta sección está concluida. Si todavía se quiere determinar las líneas sobre la Tierra en las que se cubre una porción plana del disco del astro más distante, ello no debe considerarse como un nuevo requisito, ya que solo se requiere que se asuma una porción dada del radio del astro más distante, en lugar del total. Otros problemas, que contemplan un tratamiento anterior a (esta) **Teoría de los Eclipses**, perderán en parte su interés cuando se cumplan los requisitos ya establecidos; parcialmente pueden derivarse del cumplimiento de este último.

§ 6.

Ejercicio 1.

Determinar en un tiempo dado la línea curva sobre la Tierra en la que se ve el contacto de los limbos de dos astros esféricos.

Esta tarea no es una de las exigencias que se han determinado, pero sólo su resolución abre el acceso a su cumplimiento. Para que esto surja en toda su sencillez, la resolución de la presente tarea debe recibir un grado adecuado de desarrollo, que me esforzaré por lograr.

Ya que la hora está dada, están dados x, y, s, f que dependen de ella; Sin embargo, ξ, η, ζ que aparecen fuera de estas cantidades en las ecuaciones (2) dependen de a, d, π , así como de la altura del polo ϕ y de la hora sidérea μ en cada punto de la Tierra viendo el limbo de contacto, y contienen por lo tanto, ya que esta última es la suma de la hora sidérea μ' del primer meridiano dado, ya sea directamente, o a través de la hora media o verdadera para la cual se va a resolver el problema, y la longitud Este a contar por lo tanto el tiempo como también los datos ϕ y ω (coordenadas) necesarios para la determinación del punto sobre la Tierra.

El problema requiere o (más) bien la expresión de una de estas cantidades por la otra, o bien la expresión de ambas por una cantidad indefinida, la elección de lo cual sigue siendo arbitraria. Cualquier valor de esta cantidad indefinida produce entonces valores asociados de ϕ y ω , es decir, un punto de la curva buscada; cualquier número de puntos de la curva se vuelven conocidos a través de cambios en su valor.

Segunda sección. Ejercicio 1

Incluiré la última de estas formas para determinar $\rho * \cos \phi'$ y $\rho * \sin \phi'$ que aparecen en las expresiones de ζ, η, ξ (7), teniendo, por ϕ y e la excentricidad del meridiano de la Tierra, las expresiones, como es bien sabido:

$$\begin{aligned} \rho * \cos \phi' &= \cos \phi / (1 - e^2 * (\sin \phi)^2)^{0,5} \\ \rho * \sin \phi' &= (\sin \phi * (1 - e^2)) / (1 - e^2 * (\sin \phi)^2)^{0,5} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

Si se introduce ϕ_1 tal que

$$\begin{aligned} \cos \phi_1 &= \cos \phi / (1 - e^2 * (\sin \phi)^2)^{0,5} \\ \sin \phi_1 &= (\sin \phi * (1 - e^2)^{0,5}) / (1 - e^2 * (\sin \phi)^2)^{0,5} \\ \tan \phi_1 &= \tan \phi * (1 - e^2)^{0,5} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

y si se escribe $\mu' + \omega$ en lugar de μ , las fórmulas (7) cambian a

$$\begin{aligned} \zeta &= \sin d * \sin \phi_1 * (1 - e^2)^{0,5} + \cos d * \cos \phi_1 - \cos (\mu' - a + \omega) \\ \eta &= \cos d * \sin \phi_1 * (1 - e^2)^{0,5} - \sin d * \cos \phi_1 - \cos (\mu' - a + \omega) \\ \xi &= \cos \phi_1 * \sin (\mu' - a + \omega) \end{aligned}$$

y si se tiene

$$\begin{aligned} u &= \cos \phi_1 * \sin (\mu' - a + \omega) \\ v &= \cos \phi' * \cos (\mu' - a + \omega) \\ w &= \sin \phi' \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

queda en

$$\begin{aligned} \zeta &= w * \sin d * (1 - e^2)^{0,5} + v * \cos d \\ \eta &= w * \cos d * (1 - e^2)^{0,5} - v * \sin d \end{aligned}$$

Segunda sección. Ejercicio 1

$$\xi = u \dots \dots \dots (17)$$

En lugar de ϕ y ω (coordenadas) consideraré estos u , v , w como las cantidades desconocidas del problema a resolver. Si uno ha encontrado sus valores, que corresponden a un valor de magnitud indeterminada, entonces los dos primeros dan como resultado $\mu' - a + \omega$ y $\cos \phi$, el último es $= \sin \phi_1$; así se encuentra $\tan \phi$, y dividiendo su valor por $(1 - e^2)^{0,5}$, también $\tan \phi$ (15); ω se conoce por $\mu' - a + \omega$ ya que $\mu' - a$ está dado. Por lo tanto, expresaré u , v , w por la cantidad indefinida a elegir.

Primero elegiré el ángulo de posición p del punto de contacto de los limbos en el punto Z de la esfera celeste al tamaño indefinido.

Esto da, a partir de las ecuaciones (2),

$$\begin{aligned} \eta &= y - (s - \zeta) * \tan f * \cos p \\ \xi &= x - (s - \zeta) * \tan f * \sin p \end{aligned}$$

y de su conexión con (17):

$$\begin{aligned} u &= x - (s - \zeta) * \tan f * \sin p \\ v &= -y * \sin d + (s - \zeta) * \tan f * \cos p + \zeta * \cos d \\ (1 - e^2)^{0,5} * w &= y * \cos d - (s - \zeta) * \tan f * \cos p + \zeta * \sin d \end{aligned}$$

o, escrito de otra manera:

$$\begin{aligned} u &= a + \alpha * \zeta \\ v &= b + \beta * \zeta \\ w &= c + \gamma * \zeta \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

en donde las expresiones a , b , c , α , β , γ tienen los siguientes significados:

Segunda sección. Ejercicio 1

$$\begin{aligned}
 a &= x - l * \sin p \\
 b &= -(y - l * \cos p) * \sin d \\
 c &= (y - l * \cos p) * \cos d / (1 - e^2)^{0,5} \\
 \alpha &= i * \sin p \\
 \beta &= \cos d - i * \sin d * \cos p \\
 \gamma &= (\sin d + i * \cos d * \cos p) / (1 - e^2)^{0,5} \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

escribiendo l para $s * \tan f$ e i para $\tan f$.

Como $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, se tiene la ecuación para determinar ζ

$$1 = (a + \alpha * \zeta)^2 + (b + \beta * \zeta)^2 + (c + \gamma * \zeta)^2 \dots\dots\dots (20)$$

y si se observa las asignaciones

$$\begin{aligned}
 m &= a^2 + b^2 + c^2 - 1 \\
 m' &= a * \alpha + b * \beta + c * \gamma \\
 m'' &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\
 P &= ((m')^2 - m * m'')^{0,5}
 \end{aligned}$$

Se introduce, mediante su resolución:

$$\zeta = (-m' \pm P) / m''$$

donde las fórmulas (18) se convierten en estas transformadas:

$$\begin{aligned}
 m'' * u &= m'' * a - \alpha * (m' \pm P) \\
 m'' * v &= m'' * b - \beta * (m' \pm P) \\
 m'' * w &= m'' * c - \gamma * (m' \pm P) \dots\dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

Segunda sección. Ejercicio 1

Esto completa nuestra tarea. ¿Su resolución tiene que ser necesariamente una ecuación cuadrática?, porque la posición de la recta sobre la superficie del cono viene dada por p , el ángulo f que produce el cono de sombra lunar y la ubicación de su vértice, cuyos dos puntos de intersección se encuentran con la superficie de la Tierra, y como esta es una superficie de segundo orden se encuentra mediante una ecuación cuadrática.

El significado de la característica que ha permanecido indeterminada se puede reconocer utilizando las fórmulas (21) multiplicando respectivamente en α, β, γ y sumando los productos. Es decir, se obtiene:

$$m'' * (\alpha * u + \beta * v + \gamma * w) = \pm P * (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$\pm P = \alpha * u + \beta * v + \gamma * w \dots\dots\dots (22)$$

cuya expresión puede demostrarse fácilmente que es proporcional al coseno de la distancia cenital del punto de contacto de los limbos. En efecto, si denotamos la **ascensión recta** y **declinación** de la recta de este punto por a' y d' , se tiene, por las fórmulas trigonométricas aplicadas al triángulo esférico entre éste (punto a' y d'), el punto Z de la esfera celeste y el polo:

$$\cos d' * \sin (a' - a) = \sin f * \sin p = \alpha * \cos f$$

$$\cos d' * \cos (a' - a) = \cos f * \cos d - \sin f * \sin d * \cos p = \beta * \cos f$$

$$\sin d' = \cos f * \sin d + \sin f * \cos d * \cos p = \gamma * \cos f * (1 - e^2)^{0,5}$$

y de acuerdo con las expresiones (16) de acuerdo a u, v, w :

$$\cos f * (\alpha * u + \beta * v + \gamma * w) = \sin d' * \sin \phi_1 / (1 - e^2)^{0,5} +$$

$$+ \cos d' * \cos \phi_1 * \cos (\mu' - a' + \omega)$$

o, si se reintroduce ϕ :

Segunda sección. Ejercicio 1

$$\pm P = (\sin d' * \sin \phi + \cos d' * \cos \phi * \cos (\mu' - a' + \omega)) / \\ / \cos f * (1 - e^2 * (\sin \phi)^2)^{0,5}$$

El numerador de esta expresión es el coseno de la distancia cenital del punto de contacto de los limbos, es decir, positivo o negativo según se encuentre por encima o por debajo del horizonte del punto sobre la Tierra determinado por **u, v, w**; el denominador es siempre positivo. Al usar el signo superior (+), se encuentra uno de los dos puntos de la Tierra correspondientes a las fórmulas (21), que determina el contacto de los limbos sobre su horizonte, mientras que al usar el signo inferior (-) da como resultado el segundo punto, debajo de cuyo horizonte se ubica, (es decir) en la misma ubicación del punto de contacto en la esfera celeste. Como solo tendremos que buscar el primero de estos puntos, podemos omitir el signo inferior de la fórmula (21).

En el caso de un contacto interno de los limbos, aún debe decidirse si pertenece a un eclipse anular o total. El primero es cuando el astro más cercano parece más pequeño que el más lejano, o cuando el vértice del cono de sombra lunar se encuentra en la dirección de los astros (no toca la Tierra); este último si se encuentra en la dirección opuesta. El eclipse es, por tanto, anular o total, según que **s - ζ** sea positivo o negativo.

§ 7.

No es difícil derivar reglas de las fórmulas simples dadas aquí para encontrar un punto sobre la superficie de la Tierra que vea el contacto entre los limbos en un momento dado, con un valor dado de **p**, según el cual cualquier número de puntos de la curva requerida en el **ejercicio 1** se puede encontrar mediante un cálculo más fácil. Se obtienen tales prescripciones si se modifican las fórmulas (21) de

Segunda sección. Ejercicio 1

modo que, en lugar de tres de las cantidades $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, que dependen tanto del tiempo como de p , contengan otras tres que sólo dependen del tiempo (instante), es decir, sólo se pueden calcular una vez por cada valor dado del mismo. Voy a explorar dos cambios diferentes de este tipo: ambos se basan en la introducción de

$$\begin{aligned}\alpha' &= a + \alpha * s \\ \beta' &= b + \beta * s \\ \gamma' &= c + \gamma * s\end{aligned}$$

que, según la fórmula (19), son independientes de p , a saber:

$$\begin{aligned}\alpha' &= x \\ \beta' &= s * \cos d - \gamma * \sin d \\ \gamma' &= (s * \sin d + \gamma * \cos d) / (1 - e^2)^{0,5} \dots \dots \dots (23)\end{aligned}$$

Si uno crea a, b, c a partir del cálculo reemplazando como sustitutos $\alpha' - \alpha * s, \beta' - \beta * s, \gamma' - \gamma * s$, las fórmulas (21) se convierten en:

$$\begin{aligned}m'' * u &= m'' * \alpha' + \alpha * (P - m'' * s - m') \\ m'' * v &= m'' * \beta' + \beta * (P - m'' * s - m') \\ m'' * w &= m'' * \gamma' + \gamma * (P - m'' * s - m')\end{aligned}$$

y si se escribe θ para $m'' * s + m' = \alpha' * \alpha + \beta' * \beta + \gamma' * \gamma$ en

$$\begin{aligned}m'' * u &= m'' * \alpha' + \alpha * (P - \theta) \\ m'' * v &= m'' * \beta' + \beta * (P - \theta) \\ m'' * w &= m'' * \gamma' + \gamma * (P - \theta) \dots \dots \dots (24)\end{aligned}$$

se expresa por $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$

$$p^2 = m'^2 * m' - m * m'' = (\alpha' * \alpha + \beta' * \beta + \gamma' * \gamma)^2 -$$

Segunda sección. Ejercicio 1

$$-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) * ((\alpha')^2 + (\beta')^2 + (\gamma')^2 - 1)$$

y si se denota $(\alpha')^2 + (\beta')^2 + (\gamma')^2$ por σ^2 :

$$P = (\theta^2 - m'' * (\sigma^2 - 1))^{0,5} \dots \dots \dots (25)$$

Estas fórmulas se pueden hacer más prácticas para usar utilizando las **tablas trigonométricas**. Si uno busca el tiempo para el cual se quiere conocer la línea curva requerida en el ejercicio, (se tiene) σ , ε , δ para las fórmulas:

$$\begin{aligned} \sigma * \sin \varepsilon &= x = \alpha' \\ \sigma * \cos \varepsilon * \cos \delta &= s * \cos d - y * \sin d = \beta' \\ \sigma * \cos \varepsilon * \sin \delta &= (s * \sin d + y * \cos d) / (1 - e^2)^{0,5} = \gamma' \dots \dots (26) \end{aligned}$$

donde el signo de σ se puede determinar de tal manera que ε y δ estén entre -90° y 90° , y también para cada valor de p para el que se requieren u , v , w , (se tiene ahora) r , e , d :

$$\begin{aligned} r * \sin e &= i * \sin p = \alpha \\ r * \cos e * \cos d &= \cos d - i * \sin d * \cos p = \beta \\ r * \cos e * \sin d &= (\sin d + i * \cos d * \cos p) / (1 - e^2)^{0,5} = \gamma \dots \dots (27) \end{aligned}$$

así es como se obtiene

$$\begin{aligned} \theta &= r * \sigma * (\sin \varepsilon * \sin e + \cos \varepsilon * \cos e * \cos (\delta - d)) \\ m'' &= e * r \end{aligned}$$

y si uno toma Θ según una de las fórmulas:

$$\cos \Theta = \sin \varepsilon * \sin e + \cos \varepsilon * \cos e * \cos (\delta - d)$$

$$\begin{aligned} \text{o bien } \dots (\sin (\Theta / 2))^2 &= \sin ((\varepsilon - e)/2)^2 * \cos ((\delta - d)/2)^2 + \\ &+ \cos ((\varepsilon + e)/2)^2 * \sin ((\delta - d)/2)^2 \end{aligned}$$

ciertamente,

$$P = r * (1 - \sigma^2 * \sin^2 \Theta)^{0,5}$$

$$(P - \theta) / m'' = ((1 - \sigma^2 * \sin^2 \Theta)^{0,5} - \sigma * \cos \Theta) / r$$

Si ahora escribo

$$\sin \Theta' = \sigma * \sin \Theta$$

será entonces

$$(P - \theta) / m'' = -\sin (\Theta' - \Theta) / (r * \sin \Theta)$$

donde las fórmulas (24) se convierten en:

$$\begin{aligned} u &= \alpha' - (\sin (\Theta' - \Theta) * \sin \epsilon) / \sin \Theta \\ v &= \beta' - (\sin (\Theta' - \Theta) * \cos \epsilon * \cos \delta) / \sin \Theta \\ w &= \gamma' - (\sin (\Theta' - \Theta) * \cos \epsilon * \sin \delta) / \sin \Theta \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

(quedando) transformadas. El signo de un eclipse anular o total, en el caso de contacto de limbo interno, es el valor positivo o negativo de

$$(s - \zeta) = \sin (\Theta' - \Theta) / (r * \sin \Theta)$$

Aunque estas fórmulas se pueden utilizar sin excepción en cualquier caso en particular, solo dan lo que se busca con una precisión que es casi igual a la que se utiliza para el cálculo, si la distancia del vértice del cono de sombra lunar desde la Tierra, comparada con x , y no es muy grande. Pues cuando es muy grande, δ y δ difieren muy poco, y ϵ y ϵ también son muy pequeñas, por lo que Θ también se vuelve

Segunda sección. Ejercicio 1

muy pequeño, y las expresiones (28) se convierten en diferencias de dos magnitudes del orden de la distancia desde el vértice del cono de sombra lunar. - Sin embargo, de todos los contactos de los limbos que ocurren realmente entre dos astros, solo los interiores del Sol y de la Luna pertenecen a un cono de sombra lunar, cuya punta no está muy lejos de la Tierra, razón por la cual las fórmulas (28) *Solo se recomiendan para los contactos interiores de los limbos que ocurren durante los eclipses solares!*

§ 8.

El segundo cambio en la solución del **ejercicio 1** dado en § 6 se obtiene quitando α , β , γ y reemplazándolo con α' , β' , γ' . La forma más fácil de hacer esto es hacer que las expresiones (18) dependan de u , v , w , en lugar de ζ , de otra variable desconocida ζ' , que está relacionada con la anterior se tiene,

$$\zeta = s * \zeta' / (s + \zeta')$$

es decir, aquellas expresiones (quedan) en:

$$\begin{aligned} u * (s + \zeta') &= a * s + \alpha' * \zeta' \\ v * (s + \zeta') &= b * s + \beta' * \zeta' \\ w * (s + \zeta') &= c * s + \gamma' * \zeta' \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

y la ecuación (20) transformada en:

$$(s + \zeta')^2 = (a * s + \alpha' * \zeta')^2 + (b * s + \beta' * \zeta')^2 + (c * s + \gamma' * \zeta')^2 \dots (30)$$

Resolviendo esta ecuación da:

$$\zeta' = (-s * (a * \alpha' + b * \beta' + c * \gamma' - 1) \pm ((a * \alpha' + b * \beta' + c * \gamma' - 1)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - 1) * (\sigma^2 - 1))^{0,5}) / (\sigma^2 - 1)$$

Segunda sección. Ejercicio 1

cuya expresión, según la observación ya hecha en § 6, sin ambigüedad, ha de tomarse sólo con el signo superior. Se vuelve indeterminado cuando $\sigma^2 = 1$, por lo que este caso debe excluirse y los casos $\sigma^2 > 1$ y $\sigma^2 < 1$ deben tomarse en cuenta entre sí. Si se introduce θ' y P' , de modo que:

en el 1er caso:

$$\begin{aligned} \theta' &= (a * \alpha' + b * \beta' + c * \gamma' - 1) / (\sigma^2 - 1)^{0,5} \\ P'^2 &= 1 - a^2 - b^2 - c^2 + \theta'^2 \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

en el 2er caso:

$$\begin{aligned} \theta' &= (a * \alpha' + a * \beta' + c * \gamma' - 1) / (1 - \sigma^2)^{0,5} \\ P'^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - 1 + \theta'^2 \dots \dots \dots (31*) \end{aligned}$$

significa que también será, en este caso

$$\zeta' = s * (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5}$$

en este

$$\zeta' = -s * (P' - \theta') / (1 - \sigma^2)^{0,5}$$

y las fórmulas (29) se transforman cuando $\sigma^2 > 1$ en:

$$\begin{aligned} u * (1 + (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5}) &= a + \alpha' * (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5} \\ v * (1 + (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5}) &= b + \beta' * (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5} \\ w * (1 + (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5}) &= c + \gamma' * (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5} \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

y si es $\sigma^2 < 1$ en:

Segunda sección. Ejercicio 1

$$\begin{aligned} u * (1 - (P' - \theta') / (1 - \sigma^2)^{0,5}) &= a - \alpha' * (P' - \theta') / (1 - \sigma^2)^{0,5} \\ v * (1 - (P' - \theta') / (1 - \sigma^2)^{0,5}) &= b - \beta' * (P' - \theta') / (1 - \sigma^2)^{0,5} \\ w * (1 - (P' - \theta') / (1 - \sigma^2)^{0,5}) &= c - \gamma' * (P' - \theta') / (1 - \sigma^2)^{0,5} \dots \dots \dots (32*) \end{aligned}$$

La P' que aparece en estas fórmulas está relacionada con la P utilizada anteriormente de tal manera que son

$$\begin{aligned} \text{en el 1er caso } \dots \dots \dots P'^2 * (\sigma^2 - 1) &= P^2 * s^2 \\ \text{en el 2er caso } \dots \dots \dots P'^2 * (1 - \sigma^2) &= P^2 * s^2 \end{aligned}$$

esto continua de la expresión de P si se introducen α', β', γ' en lugar de α, β, γ .

Cuando se van a aplicar estas fórmulas será conveniente determinar ρ y δ' tales que

$$\begin{aligned} \rho * \sin \delta' &= s * \sin d \\ \rho * \cos \delta' &= \cos d / (1 - e^2)^{0,5} \dots \dots \dots (33) \end{aligned}$$

Esto nos da

$$\begin{aligned} a &= x - l * \sin p \\ b &= -(y - l * \cos p) * \rho * \sin \delta' \\ c &= (y - l * \cos p) * \rho * \cos \delta' \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

y además:

1) si $\sigma^2 > 1$ y $1 / \sigma = \sin \lambda$ se establece:

$$\begin{aligned} \theta' &= (x - l * \sin p) * \sin \varepsilon / \cos \lambda + \rho * (y - l * \cos p) * \\ &\quad * \cos \varepsilon * \sin (\delta - \delta') / \cos \lambda - \tan \lambda \end{aligned}$$

Segunda sección. Ejercicio 1

$$P'^2 = 1 - (x - l * \sin p)^2 - \rho^2 * (y - l * \cos p)^2 + \theta'^2$$

$$u * (1 + \tan \lambda * (P' - \theta')) = a + \sin \varepsilon * (P' - \theta') / \cos \lambda$$

$$v * (1 + \tan \lambda * (P' - \theta')) = b + \cos \varepsilon * \cos \delta * (P' - \theta') / \cos \lambda$$

$$w * (1 + \tan \lambda * (P' - \theta')) = c + \cos \varepsilon * \sin \delta * (P' - \theta') / \cos \lambda \dots (35)$$

2) si $\sigma^2 < 1$ y $\sigma = \sin \lambda$ se establece:

$$\theta' = (x - l * \sin p) * \sin \varepsilon * \tan \lambda + \rho * (y - l * \cos p) * \cos \varepsilon * \sin (\delta - \delta') * \tan \lambda - 1 / \cos \lambda$$

$$P'^2 = (x - l * \sin p)^2 + \rho^2 * (y - l * \cos p)^2 - 1 + \theta'^2$$

$$u * (1 - (P' - \theta') / \cos \lambda) = a - \sin \varepsilon * \tan \lambda * (P' - \theta')$$

$$v * (1 - (P' - \theta') / \cos \lambda) = b - \cos \varepsilon * \cos \delta * \tan \lambda * (P' - \theta')$$

$$w * (1 - (P' - \theta') / \cos \lambda) = c - \cos \varepsilon * \sin \delta * \tan \lambda * (P' - \theta') \dots (35^*)$$

El signo de un eclipse anular, o total, en caso de contacto interno de los limbos, es el valor positivo o negativo de

$$s - \zeta = s^2 / (s + \zeta'),$$

o el mismo o diferente signo de **s** y signo del factor común de **u**, **v**, **w**.

El inconveniente que poseía la prescripción dada en el apartado anterior (§ 7) en el caso de que la distancia del vértice del cono de sombra lunar a la Tierra es mucho mayor que **x** e **y**, no lo posee la presente; más bien, *¿esto es más ventajoso?* cuanto más sea diferente σ^2 de **1**. Es pues aconsejable en general, ya que sólo el contacto interno entre los limbos del Sol y de la Luna puede dar lugar a casos en que sea preferible la prescripción anterior.

§ 9.

Debo decir algo sobre el caso excluido en el apartado (§ 8) anterior, que ocurre cuando $\sigma^2 = 1$.

Si se coloca alrededor del centro de la Tierra un (cuerpo) esferoide de revolución elíptico similar, cuya superficie pasa por el vértice del cono de sombra lunar, cuyas coordenadas paralelas al **ecuador** terrestre son x y $s * \cos d - y * \sin d$, mientras que la coordenada perpendicular a él es $s * \sin d + y * \cos d$, también lo es el cuadrado de su semieje mayor

$$= x^2 + (s * \cos d - y * \sin d)^2 + (s * \sin d + y * \cos d)^2 / (1 - e^2)$$

Como esta también es la expresión de σ^2 , se prosigue cuando el caso excluido ocurre cuando el vértice del cono de sombra lunar atraviesa la superficie de la Tierra. Por lo tanto, solo puede ocurrir cuando los limbos de los dos astros se tocan, en realidad solo cuando los limbos del Sol y de la Luna se tocan por dentro, y solo cuando la punta del cono de sombra lunar se mueve a través de la Tierra, en cuyo caso realmente ocurre en los dos instantes en el tiempo de su paso por la superficie de la Tierra.

Cuando $\sigma^2 = 1$, las dos raíces de la ecuación (20) se vuelven racionales. Porque allí

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (a + \alpha * s)^2 + (b + \beta * s)^2 + (c + \gamma * s)^2 = \\ &= 1 + m + 2 * m' * s + m'' * s^2 \end{aligned}$$

Así que en el caso $\sigma^2 = 1$:

$$0 = m + 2 * m' * s + m'' * s^2$$

Segunda sección. Ejercicio 1

y la ecuación (20) es

$$0 = m + 2 * m' * s + m'' * \zeta^2$$

esto puede escribirse

$$0 = m'' * (\zeta^2 - s^2) + 2 * m' * (\zeta - s)$$

o $0 = (\zeta - s) * (m'' * (\zeta + s) + 2 * m')$

así que por medio de

$$\zeta = s \text{ y } \zeta = -s - 2 * m' / m''$$

se da por satisfecho. La **primera de estas raíces** pertenece al caso en que el punto de la Tierra determinado por **u, v, w** es aquel donde también está el vértice del cono de sombra lunar; cuando tiene lugar, las fórmulas (18) se convierten en:

$$\begin{aligned} u &= a + \alpha * s = \alpha' = \sin \varepsilon \\ v &= b + \beta * s = \beta' = \cos \varepsilon * \cos \delta \\ w &= c + \gamma * s = \gamma' = \cos \varepsilon * \sin \delta \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

y así determinar el punto deseado en la Tierra independientemente de **p**, que también es necesario, ya que este punto ve el contacto de los limbos de los dos astros en todos sus puntos. La **segunda raíz** corresponde al caso en que el punto de la Tierra determinado por **u, v, w** se encuentra en la curva que recorta el cono de sombra lunar, mientras que su vértice está sobre la superficie de la Tierra, después de su paso por su interior; cuando la utilizas obtienes:

$$\begin{aligned} u &= a - \alpha * (s + 2 * m' / m'') = \alpha' - 2 * \alpha * (s + m' / m'') \\ v &= b - \beta * (s + 2 * m' / m'') = \beta' - 2 * \beta * (s + m' / m'') \end{aligned}$$

Segunda sección. Ejercicio 1

$$w = c - \gamma * (s + 2 * m' / m'') = \gamma' - 2 * \gamma * (s + m' / m'') \dots (37)$$

Si se debe usar la primera o la segunda raíz es evidente (dado) por el signo (delante de **P**) de (22):

$$\pm P = \alpha * u + \beta * v + \gamma * w$$

Si uno escribe las expresiones (36) y las expresiones (37) en esta expresión, uno obtiene, **en el primer caso:**

$$\pm P = m'' * s + m' = \alpha' * \alpha + \beta' * \beta + \gamma' * \gamma,$$

en el segundo:

$$= -\alpha' * \alpha - \beta' * \beta - \gamma' * \gamma$$

en éste o aquel es por lo tanto el (valor) actual, dependiendo de si $\alpha' * \alpha + \beta' * \beta + \gamma' * \gamma$ sea positivo o negativo.

Además del caso $\sigma^2 = 1$, continuado aquí, el caso $s = 0$ también debe ser excluido en la determinación de **u, v, w** dada en el (§ 8) anterior. Porque en este caso cualquier valor de ζ' desaparece, y las expresiones (29), que por lo tanto se vuelven idénticas = 0, dejan **u, v, w** indeterminadas. Cuando se da este caso, así como cuando **s** es muy pequeño, y no menos cuando σ^2 difiere muy poco de 1, se deben seguir las reglas dadas en el § 7. Todas estas causas de abandono de los preceptos del apartado anterior solo pueden presentarse en casos de contacto interno entre los limbos del Sol y de la Luna, y solo cuando la punta del cono de sombra lunar atraviesa la Tierra, es decir, solo en casos raros de tal contacto.

§ 10.

Segunda sección. Ejercicio 1

La solución del **ejercicio 1** desarrollado anteriormente, enseña cómo se pueden encontrar los puntos de la curva correspondientes a ciertos valores del ángulo arbitrario **p**. Uno podría quedar satisfecho con esto si no se requiriera nada más; pero realmente debe exigirse más, ya que el interés de la tarea, como ya lo señalé al comienzo del **§ 6**, no debe buscarse tanto en el conocimiento de la curva que le corresponde en cada momento como en los (instantes) medios, que otorga su solución a la solución de otras tareas del análisis de los eclipses: no sólo debe ser posible encontrar los puntos de la curva tan fácilmente aplicables como sea posible, a partir de *ciertos* valores de **p**, sino también la solución más simple de la tarea, que deja *indeterminada* la magnitud arbitraria.

Con el fin de mostrar que todavía hay algo esencial que desear en este último aspecto, aquí sólo señalo que la primera y la segunda de las demandas hechas a la teoría de los eclipses en el apartado **§ 5** deben cumplirse cumpliendo la condición **P = 0**; que requieren la determinación de los valores de **p** que cumplan esta condición y su posterior aplicación; que deben conducir a considerables dificultades, ya que la expresión de **P²** contiene el coseno y el seno de **p**, así como sus cuadrados y su producto, es decir, es de 4° grado con relación a **p**. Este alto grado de la ecuación **P² = 0**, que dificulta la resolución de otros problemas, no puede evitarse mientras **p** siga siendo la cantidad indefinida de la que se hacen dependientes las expresiones de **u, v, w**; pero la elección de la cantidad indefinida es arbitraria, y en lugar de **p** una puede sustituirse por otra, mediante la introducción de la cual se simplificó esencialmente la expresión de **P²**.

Cuando se trataba de liberar toda una función racional de cuarto grado de **x** de las potencias impares de **x**, **Euler** lo logró sustituyendo otra variable **y**, cuya conexión con **x** es esencialmente la misma que la que existe entre las líneas trigonométricas de un nuevo ángulo

indefinido y las de **p** se deben asumir para bajar el grado de **P²** al segundo; abrió así la brillante serie de descubrimientos recientes sobre las (funciones) trascendentes elípticas. En el famoso tratado **(I)**, en el que dio la solución a un problema muy importante en la astronomía física, **Gauss** volvió a lograr el éxito mediante la misma sustitución, que, sin embargo, ahora tenía que aparecer en una forma completamente diferente. **Jacobi** ha dicho muchas cosas excelentes al respecto **(II)**, y también la persigue en una dirección que no quita esa tarea y que conduce a la solución de problemas geométricos difíciles, a los que también se agregará el presente. Los dos grandes geómetras mencionados en último lugar exponen este asunto con tanta claridad que ya no hay dificultad en aplicarlo más. -Combinando la descomposición de **P²** en dos factores dada en el **primer volumen** de esta obra, **página 263**, con esta sustitución de una nueva cantidad indefinida, creo haber reducido los problemas de la teoría de los eclipses a su forma más simple.

Referencias:

- (I)** *Determinatio Attractionis etc...*, Gottingae, 1818.
- (II)** *Crelle. Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Capítulo 8, Pág. 253 & 321. Berlin 1832.

§ 11.

La expresión de **P²**, ordenada según **cos p** y **sin p**, tiene la forma:

$$P^2 = a + 2 * b * \cos p + 2 * c * \sin p + d * \cos p^2 + 2 * e * \cos p * \sin p + f * \sin p^2 \dots \dots \dots (38)$$

cuyos coeficientes especificaré primero.
El apartado (§ 7) contiene la expresión:

$$P^2 = (\alpha' * \alpha + \beta' * \beta + \gamma' * \gamma)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) *$$

Segunda sección. Ejercicio 1

$$* ((\alpha')^2 + (\beta')^2 + (\gamma')^2 - 1)$$

que, sustituyendo las expresiones (27) de α , β , γ , pasa directamente a la forma (38). Las expresiones de sus coeficientes se simplifican si de las ecuaciones se obtienen dos nuevas cantidades s' e y' , estrechamente relacionadas con s e y :

$$\begin{aligned} s * \cos d - y * \sin d &= s' * \cos d - y' * \sin d \\ (s * \sin d + y * \cos d) / (1 - e^2)^{0,5} &= (s' * \sin d - y' * \cos d) * (1 - e^2)^{0,5} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

surgen, en lugar de s e y , en las expresiones (26) de α' , β' , γ' , estas expresiones transformadas en:

$$\begin{aligned} \alpha' &= x \\ \beta' &= s' * \cos d - y' * \sin d \\ \gamma' &= (s' * \sin d - y' * \cos d) * (1 - e^2)^{0,5} \end{aligned}$$

Este cambio se convierte en el denominador $1 - e^2$ eliminado de $\gamma' * \gamma$ y $\alpha' * \alpha + \beta' * \beta + \gamma' * \gamma$ se convierte en la expresión:

$$\begin{aligned} x * i * \sin p + (s' * \cos d - y' * \sin d) * (\cos d - i * \sin d * \cos p) + \\ + (s' * \sin d + y' * \cos d) * (\sin d + i * \cos d * \cos p) \end{aligned}$$

que es muy simple, a saber:

$$\alpha' * \alpha + \beta' * \beta + \gamma' * \gamma = s' + y' * i * \cos p + x * i * \sin p$$

Sumando las expresiones (27) de α , β , γ y σ^2 escritas para $\alpha' * \alpha + \beta' * \beta + \gamma' * \gamma$, serán:

$$\begin{aligned} P^2 &= (s' + y' * i * \cos p + x * i * \sin p)^2 - (\sigma^2 - 1) * (i^2 * (\sin p)^2 + \\ &+ (\cos d - i * \sin d * \cos p)^2 + (\sin d + i * \cos d * \cos p)^2 / (1 - e^2)) \end{aligned}$$

o los coeficientes de la expresión (38) se convierten en:

$$\begin{aligned}
 a &= s'^2 - (\sigma^2 - 1) * (1 - e^2 * (\cos d)^2) / (1 - e^2) \\
 b &= i * (s' * y' - (\sigma^2 - 1) * (e^2 * \cos d * \sin d) / (1 - e^2)) \\
 c &= i * s' * x \\
 d &= i^2 * (y'^2 - (\sigma^2 - 1) * (1 - e^2 * (\sin d)^2) / (1 - e^2)) \\
 e &= i^2 * y' * x \\
 d &= i^2 * (x^2 - (\sigma^2 - 1)) \dots \dots \dots (40)
 \end{aligned}$$

El primero de estos coeficientes también puede ser representado teniendo (la siguiente) forma:

$$a = (1 - x^2) * (1 - e^2 * (\cos d)^2) / (1 - e^2) - y^2 / (1 - e^2)$$

que, siempre que $\sigma^2 - 1$ exceda unas pocas unidades, lo produce con mayor precisión con el mismo cálculo exacto. De acuerdo con las ecuaciones (39), las cantidades aquí introducidas tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 s' &= s * (1 - e^2 * (\cos d)^2) / (1 - e^2) + y * (e^2 * \cos d * \sin d) / (1 - e^2) = \\
 s' &= s + (s * \sin d + y * \cos d) * e^2 * \sin d / (1 - e^2) \\
 y' &= s * (e^2 * \cos d * \sin d) / (1 - e^2) + y * (1 - e^2 * (\sin d)^2) / (1 - e^2) = \\
 y' &= y + (s * \sin d + y * \cos d) * e^2 * \cos d / (1 - e^2) \dots \dots \dots (41)
 \end{aligned}$$

La forma de las expresiones **u**, **v**, **w** desarrolladas en el § 8 no contiene **P**, sino **P'**, y la conexión entre las dos se encuentra en los casos separados allí.

$$P'^2 = s^2 * P^2 / (\sigma^2 - 1) \text{ y en lugar de } P'^2 = s^2 * P^2 / (1 - \sigma^2)$$

Segunda sección. Ejercicio 1

Si se quiere conocer las expresiones de los coeficientes de la expresión de P'^2 ordenados según $\cos p$ y $\sin p$, se debe pues utilizar las expresiones (40), según se dé el primer o el segundo caso, multiplicados en

$$s^2 / (\sigma^2 - 1) \text{ o } s^2 / (1 - \sigma^2)$$

Pero si se siguen las prescripciones del § 8, la introducción de s' e y' no es necesaria para obtener expresiones simples de los coeficientes de la expresión de P'^2 , ya que las cantidades ya introducidas allí también producen tales expresiones.

Denotar por h , k , q las cantidades, que son siempre muy pequeñas en el caso de una gran distancia de la punta del cono de sombra lunar a la Tierra:

$$\begin{aligned} h &= \sin \varepsilon / \cos \lambda \\ k &= \cos \varepsilon * \sin (\delta - \delta') / \cos \lambda \\ q &= h * x + k * \rho * y - \tan \lambda \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

así fue, en el caso $\sigma^2 > 1$ (35) :

$$\theta' = q - k * \rho * l * \cos p - h * l * \sin p \dots\dots\dots (43)$$

y el coeficiente de P'^2 se convierte en:

$$\begin{aligned} a &= 1 - x^2 - \sigma^2 * y^2 + q^2 \\ b &= \rho * l * (\rho * y - k * q) \\ c &= l * (x - h * q) \\ d &= -\rho^2 * l^2 * (l - k^2) \\ e &= \rho * l^2 * h * k \\ d &= -l^2 * (1 - h^2) \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

Segunda sección. Ejercicio 1

Si, por el contrario, se denota, para el caso $\sigma^2 < 1$ (35*):

$$\begin{aligned} h &= \sin \varepsilon * \tan \lambda \\ k &= \cos \varepsilon * \sin (\delta - \delta') * \tan \lambda \\ q &= h * x + k * \rho * y - 1 / \cos \lambda \dots\dots\dots (42*) \end{aligned}$$

así será de nuevo

$$\theta' = q - k * \rho * l * \cos p - h * l * \sin p \dots\dots\dots (43*)$$

y el coeficiente de P'^2 se convierte en:

$$\begin{aligned} a &= x^2 + \sigma^2 * y^2 - 1 + q^2 \\ b &= -\rho * l * (\rho * y + k * q) \\ c &= -l * (x - h * q) \\ d &= \rho^2 * l^2 * (1 + k^2) \\ e &= \rho * l^2 * h * k \\ d &= l^2 * (1 + h^2) \dots\dots\dots (44*) \end{aligned}$$

§ 12.

De las expresiones que se entienden en la forma (38) que tengo en la **sexta sección**. Ensayo sobre el **primer volumen** de esta obra, **pág. 263**, demostrado que se pueden dividir en factores siempre reales:

$$\begin{aligned} P^2 &= (a + g + (b + R) * \cos p + (c + R') * \sin p) * \\ &* (a + g + (b - R) * \cos p + (c - R') * \sin p) / (a + g) \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

se puede descomponer, donde **g** es una raíz real de la ecuación cúbica:

$$0 = (a + x) * (d - x) * (f - x) - b^2 * (f - x) -$$

Segunda sección. Ejercicio 1

$$-c^2 * (d - x) - e^2 * (a + x) + 2 * b * c * e \dots \dots \dots (46)$$

significa qué ecuación, ordenada por las potencias de **x**:

$$0 = x^3 - A * x^2 + B * x - C \dots \dots \dots (47)$$

los coeficientes son:

$$A = d + f - a$$

$$B = b^2 + c^2 - e^2 - a * (d + f) + d * f$$

$$C = b^2 * f + c^2 * d + e^2 * a - a * d * f - 2 * b * c * e$$

incorrectamente también **R** y **R'** por las expresiones

$$R^2 = b^2 - (a + g) * (d - g)$$

$$R'^2 = c^2 - (a + g) * (f - g) \dots \dots \dots (48)$$

y su producto, de ahí también la semejanza o diferencia de sus signos

$$R^2 * R'^2 = b * c - e * (a + g) \dots \dots \dots (49)$$

pero los signos siguen siendo arbitrarios, lo que también es necesario, ya que esta arbitrariedad se produce por la confusión aparentemente indiferente de los dos factores entre sí.

Allí mostré además que si la ecuación cúbica tiene tres raíces reales, la ecuación $R^2 = 0$ se satisface con cuatro valores reales o imaginarios de **p**, el primero o el último evidentes como $(b + R)^2 + (c + R')$ y $(b - R)^2 + (c - R')$ son menores o mayores que $(a + g)^2$; que se satisface con dos valores imaginarios y dos reales de **p** si la ecuación cúbica tiene una sola raíz real, en cuyo caso una de las sumas de cuadrados

Segunda sección. Ejercicio 1

recién mencionadas es menor y la otra mayor que $(a + g)^2$. Haré lo que sigue en estas proposiciones.

Si los limbos se contactan en un momento dado, para lo cual se suponen válidos los valores de los coeficientes de (38), no es visible en ninguna parte de la Tierra, entonces P debe volverse imaginario para cada valor de p , o P^2 negativo; pero si P^2 es positivo para todo valor de p , así también le corresponde a cada punto de la Tierra, en que se ven tocar los limbos. En estos dos casos la ecuación cúbica tiene tres raíces reales, una de las cuales da la descomposición de P^2 en dos factores reales, y $(b + R)^2 + (c + R')^2$ y $(b - R)^2 + (c - R')^2$ ambos son más pequeños que $(a + g)^2$. Si P^2 se vuelve positivo solo entre ciertos límites de p y negativo para todos los demás valores de p , entonces debe desaparecer para dos valores de p , es decir, una de las sumas de los cuadrados mencionadas debe ser menor y la otra mayor que $(a + g)^2$, y la ecuación cúbica tiene una sola raíz real; o debe anularse para cuatro valores de p , es decir, ambas sumas son mayores que $(a + g)^2$, y la ecuación cúbica debe tener tres raíces reales. —Puesto que cada valor de p determina una línea recta que le corresponde en la superficie del cono de sombra lunar, valor de p para el cual P^2 desaparece aunque una de estas líneas toca la superficie de la Tierra (§ 6), queda claro que el último caso mencionado solo puede ocurrir si cuatro líneas rectas en la superficie del cono pueden tocar el suelo.

Este caso es matemáticamente posible, y obviamente debe ocurrir cuando la extensión (longitud) del cono de sombra y su posición relativa a la Tierra son tales que el eje pequeño (de la elipse de la sombra) sobre la Tierra está completamente dentro del área que rodea, pero los extremos del grande sobresalen de esta; pero en realidad no ocurrirá, ya que no hay par de astros, uno de cuyos conos de sombra, donde pueda impactar contra la Tierra, tenga la extensión necesaria.

Segunda sección. Ejercicio 1

Por lo tanto, lo excluiré y basaré lo que sigue en la suposición de que **P** puede desaparecer sin ningún valor o solo con dos valores de **p**; bajo cuya condición, como he señalado anteriormente, en al menos uno de los dos factores de **P²** dependientes de **p**, la suma de los cuadrados de los coeficientes de **cos p** y **sen p** es menor que **(a + g)²**.

Por lo tanto, elegiré la sustitución de una nueva cantidad indefinida, en lugar de **p**, de tal manera que conduzca a fórmulas reales si esta condición se cumple por uno de los dos factores de **(45)** dependientes de **p**, a saber, por el último escrito uno. Dado que los signos de **R** e **R'** siguen siendo arbitrarios y solo queda claro a partir de **(49)** si se supone que ambos son iguales o diferentes, el factor escrito en último lugar siempre puede entenderse como aquel de los dos para los que la suma de los cuadrados del coeficiente de **cos p** y **sin p** tiene el valor más pequeño. Uno siempre puede encontrar los ángulos reales **n** y **m** utilizando las fórmulas:

$$\begin{aligned} \sin n * \cos m &= (b - R) / (a + g) \\ \sin n * \sin m &= (c - R') / (a + g) \dots \dots \dots (50) \end{aligned}$$

determinar en qué sentido positivo pueden ser aceptadas, y a través de su introducción se (tiene)

$$\begin{aligned} a + g + (b - R) * \cos p + (c - R') * \sin p &= \\ &= (a + g) * (1 + \sin n * \cos (p - m)) \end{aligned}$$

Ahora, en lugar del indefinido **p**, introducir otro ángulo **u** en consideración, que está relacionado con el anterior por las fórmulas:

$$\begin{aligned} \cos (p - m) &= (\cos u - \sin n) / (1 - \sin n * \cos u) \\ \sin (p - m) &= \cos n * \sin u / (1 - \sin n * \cos u), \dots \dots (51) \end{aligned}$$

Segunda sección. Ejercicio 1

por lo que se vuelven así

$$1 + \sin n * \cos (p - m) = \cos n^2 / (1 - \sin n * \cos u)$$

y así también

$$(a + g + (b - R) * \cos p + (c - R') * \sin p) / (a + g) = \\ = \cos n^2 / (1 - \sin n * \cos u) \dots \dots \dots (51)$$

El factor restante de P^2 se puede escribir

$$a + g + ((b + R) * \cos m + (c + R') * \sin m) * \cos (p - m) - \\ - ((b + R) * \sin m - (c + R') * \cos m) * \sin (p - m)$$

y se transforma por la sustitución en la (51) en:

$$(a + g + (b + R) * \sin n * \cos m - (c + R') * \sin n * \sin m) + \\ + ((b + R) * \cos m + (c + R') * \sin m - (a + g) * \sin n) * \cos u - \\ - ((b + R) * \sin m - (c + R') * \cos m) * \cos n * \sin u) / \\ / (1 - \sin n * \cos u)$$

y por las expresiones resultantes de (50):

$$b * \cos m + c * \sin m = R * \cos m + R' * \sin m + (a + g) * \sin n \\ b * \sin m - c * \cos m = R * \sin m - R' * \cos m$$

en:

$$(a + g - (b^2 - R^2 + c^2 - (R')^2) / (a + g) + \\ + 2 * (R * \cos m + R' * \sin m) * \cos u - \\ + 2 * (R * \sin m - R' * \cos m) * \cos n * \sin u) / \\ / (1 - \sin n * \cos u)$$

Segunda sección. Ejercicio 1

El primer término de esta expresión viene dado por la (48) en

$$3 * g + a - d - f$$

o, dado que $d + f - a = A$ (47), (queda) transformada en

$$3 * g - a$$

Introduciendo el ángulo indefinido u , la expresión (38) ha asumido la forma:

$$P^2 = ((\cos n)^2 * (3 * g - A + 2 * (R * \cos m + R' * \sin m) * \cos u - 2 * (R * \sin m - R' * \cos m) * \cos n * \sin u)) / (1 - \sin n * \cos u)^2 \dots \dots \dots (53)$$

La relación entre $p - m$ y u , expresada por las fórmulas (51), por la cual se ha obtenido esta transformación, es la misma que se da entre la **anomalía verdadera** y la **excéntrica** en una elipse cuya excentricidad es $= \sin n$ (I). También se puede representar en la forma familiar:

$$\tan (p - m) / 2 = \tan (45^\circ + n / 2) * \tan (u / 2) \dots \dots \dots (54)$$

Referencias:

(I) *Jacobi a. a. O.* Pág. 324.

§ 13.

La expresión (53) de P^2 se simplifica aún más si no sólo se utiliza la raíz de la ecuación cúbica (47) denotada por g , sino también sus otras raíces, que denotaré por g' y g'' . Si tan sólo, si una de sus raíces es real, no hace falta decir que la descomposición requerida de P^2

Segunda sección. Ejercicio 1

en dos factores reales se obtiene solo si g denota la raíz real; pero si las tres raíces son reales, se hace necesario investigar cuál de ellas es la denotada por g , que da la descomposición en dos factores reales. Por lo tanto, consideraré la naturaleza de las raíces de la ecuación (47) en primer lugar, demostraré que esta ecuación, siempre que su último término no se anule, es negativa y tiene raíz

$$-C = -b^2 * f - c^2 * d - e^2 * a + a * d * f + 2 * b * c * e$$

las expresiones (40) se sustituyen por a, b, c , etc. y se ordenan según las potencias de $\sigma^2 - 1$, se halla que el término multiplicado a la primera potencia de esta cantidad y el término que no lo contiene desaparecen, pero los dos términos restantes se convierten en

$$i^4 * (\sigma^2 - 1)^2 * [x^2 + y'^2 * (1 - e^2 * (\cos d)^2) - 2 * y' * s' * e^2 * \cos d * \sin d + s'^2 * (1 - e^2 * (\sin d)^2) - \sigma^2 + 1] / (1 - e^2)$$

y dado que la parte de esta expresión encerrada entre corchetes, según las fórmulas (39) es:

$$= x^2 + (s * \cos d - y * \sin d)^2 + (s * \sin d + y * \cos d)^2 / (1 - e^2) - \sigma^2 + 1 = 1$$

Y esta misma se reduce en

$$-C = i^4 * (\sigma^2 - 1)^2 / (1 - e^2) \dots \dots \dots (55)$$

Pero si se toman las expresiones (44) de a, b, c, \dots , es decir, quedan los coeficientes de la expresión de

$$P'^2 = s^2 * P^2 / (\sigma^2 - 1)$$

Segunda sección. Ejercicio 1

se llega, a este **-C** la tercera dimensión de **a**, **b**, **c**, ... conteniendo la expresión para ello siendo

$$\begin{aligned}
 -C &= (i^4 * (\sigma^2 - 1)^2 / (1 - e^2)) * (s^2 / (\sigma^2 - 1))^3 = \\
 &= i^4 * s^2 / ((1 - e^2) * (\sigma^2 - 1)) \dots \dots \dots (55*)
 \end{aligned}$$

sí, como suponen las expresiones (44), $\sigma^2 > 1$, como la anterior, es siempre positiva. También se vuelve positivo si se asumen las expresiones (44*) de los coeficientes **a**, **b**, **c**,... de los cuales se asume $\sigma^2 < 1$

$$P'^2 = s^2 * P^2 / (1 - \sigma^2)$$

El último término de la ecuación (47) es por tanto, si no es nulo, positivo en todos los casos, por lo que, si no es nulo, siempre es raíz negativa, y si sus 3 raíces son reales, entonces tiene tanto dos más negativas o dos positivas.

La elección de la raíz **g** de la ecuación cúbica sigue siendo arbitraria si no se distingue de **g'** y **g''** por el hecho de que es la única que descompone **P²** en dos factores reales. Sigue siendo arbitraria si la ecuación **P² = 0** se satisface con cuatro valores reales de **p**, en cuyo caso —pero excluida en el apartado anterior (§ 12)— la ecuación cúbica tiene tres raíces reales y **g** puede ser cualquiera de ellas, porque cualquier combinación de los cuatro factores simples de **P²** en dos pares es entonces real. Pero no queda arbitrario si la ecuación **P² = 0** es satisfecha por dos y por cuatro valores imaginarios de **p**.

En el primer caso **g** es la única raíz real de la ecuación cúbica; en el segundo, entre las tres entonces raíces reales, es la única que resulta en una descomposición de **P²** en dos factores reales (45). Esta condición requiere que

Segunda sección. Ejercicio 1

$$R^2 = b^2 - (a + g) * (d - g) \text{ y } R'^2 = c^2 - (a + g) * (f - g)$$

sea positivo, las expresiones similares en las que g' o g'' se escriben en lugar de g , son por ej.

$$b^2 - (a + g') * (d - g') \text{ y } c^2 - (a + g') * (f - g')$$

aunque negativos, ambos negativos, porque de lo contrario el producto de sus raíces cuadradas, que por (49) es real por cualquier valor real de la raíz aplicada, sería imaginario. De esto continua que

$$(a + g') * (d - g') - (a + g) * (d - g) \text{ y } (a + g') * (f - g') - (a + g) * (f - g)$$

$$\text{o } \dots \dots \dots (g - g') * (d - a - g - g') \text{ y } (g' - g) * (f - a - g - g')$$

$$\text{o por } d + f - a = g + g' + g'',$$

$$(g' - g) * (g'' - f) \text{ y } (g' - g) * (g'' - d)$$

siendo positivas, las tres cantidades

$$(g' - g), (g'' - f), (g'' - d)$$

por lo tanto son del mismo signo. Por la misma razón también deben

$$(g'' - g), (g' - f), (g' - d)$$

tener el mismo signo. Pero el signo común de las tres primeras cantidades debe ser el mismo que el de las tres últimas; pues si ambos fueran diferentes, $g'' - g - (g' - g) = g'' - g'$ y $g' - f - (g'' - f) = g' - g''$ deberían tener el mismo signo, lo que sólo sucede en el caso de la eliminación de $g'' - g'$ no es contradictorio, en cuyo caso, sin

Segunda sección. Ejercicio 1

embargo, las tres primeras y las tres últimas cantidades no concuerdan en el signo solamente, sino completamente. De esto prosigue que si todas, las tres raíces de la ecuación cúbica, no son iguales entre sí, g'' y g , ambas son más pequeñas o más grandes, no solo g , sino también (lo son) d y f .

Ahora se puede demostrar que la raíz cuadrada de g de la ecuación cúbica, es negativa cuando el vértice del cono de sombra lunar está fuera de la Tierra y positiva cuando está dentro de la Tierra. Si el cono de sombra lunar está completamente fuera de la Tierra, p^2 no necesita volverse positivo para cualquier valor de p , lo que solo puede suceder si el término de la expresión (53) independiente de p , a saber, $3 * g - A = 2 * g - g' - g''$, es negativo.

En este caso $g - g'$ y $g - g''$ son negativas, o g es la menor de las tres raíces reales, por lo tanto como al menos una de ellas es negativa, es negativa en cualquier caso. Cuando el cono de sombra lunar está parcialmente dentro de la Tierra, la ecuación cúbica tiene una sola raíz real, que ya sabemos que es negativa. Cuando, finalmente, está completamente encerrado por la Tierra, la raíz negativa g , en los dos casos anteriores —siempre anterior al presente caso y posterior a él— sólo puede haber cambiado de signo si hubiera desaparecido antes, es decir, si el producto de las tres raíces también ha desaparecido, lo que, según su expresión (55), sólo puede ocurrir si se convierte en $\sigma^2 = 1$, o la punta del cono de sombra lunar brilla a través de la superficie de la Tierra.

Si el vértice del cono de sombra lunar, durante el curso de un eclipse, no alcanza el interior de la Tierra, g también puede ser negativo. En el caso contrario g debe ser positivo, si entonces se demuestra que las tres raíces de la ecuación cúbica no pueden ser negativas. Porque siempre que el cono de sombra lunar esté completamente dentro de la Tierra, es decir, siempre que su vértice esté en el interior, el

Segunda sección. Ejercicio 1

término de la expresión (53) que es independiente de p es positivo, de lo que continua que g es entonces la mayor de las tres raíces, es decir, si no todas son negativas, al menos es positiva. Si se consideran las expresiones (40) de los coeficientes de P^2 en la expresión del segundo coeficiente de la ecuación cúbica, a saber

$$B = b^2 + c^2 - e^2 - a * (d + f) + d * f$$

sustituido, uno encuentra que no desaparece en una parte multiplicada de $\sigma^2 - 1$, sino en las otras partes, después de algunas ligeras reducciones basadas en las fórmulas (39), se convierten conjuntamente en

$$B = -i^2 * (1 - \sigma^2) * [1 - e^2 * \cos d^2] + s^2 * (1 + i^2) + \\ + e^2 * (s * \sin d + y * \cos d)^2 / (1 - e^2) + \\ + (1 - \sigma^2) - i^2 * (1 - e^2 * (\sin d)^2) / (1 - e^2)$$

Cuando $\sigma^2 < 1$, o el vértice del cono de sombra lunar está en el interior de la Tierra, sólo el último término de la parte de esta expresión encerrada entre corchetes es negativo, pero es menor que el primer término solo, ya que i^2 es siempre una fracción muy pequeña; por lo tanto, B mismo es negativo, lo que prueba que la ecuación cúbica no puede tener tres raíces negativas en el presente caso, por lo que g también debe ser positivo. Como ya se sabe que nunca puede tener una única raíz positiva, también prosigue que, en el presente caso, una de las raíces g' y g'' también debe ser positiva, mientras que la otra es negativa. —Todo junto lo que he dicho de la raíz cuadrada g de la ecuación cúbica nunca deja en duda su elección. Cuando el vértice del cono de sombra lunar está fuera de la Tierra, siempre es negativo; cuando este vértice está dentro de la Tierra, es positivo.

Segunda sección. Ejercicio 1

Cuando el cono de sombra lunar está enteramente fuera de la Tierra, es la más pequeña de las tres raíces reales; cuando está enteramente cubierto por la Tierra, es la más grande. Si, en este caso, su vértice está fuera de la Tierra, ella misma es negativa, que es, entre las tres raíces negativas, la más pequeña en magnitud absoluta; si este vértice está dentro de la Tierra, g es la mayor de dos raíces positivas. Para completar, observo que en el momento del paso del vértice del cono de sombra lunar a través de la superficie de la Tierra, dos raíces de la ecuación cúbica se desvanecen al mismo tiempo y que g es una de ellas.

También se pueden especificar límites entre los cuales debe estar la raíz g . Si se eleva al cuadrado la cantidad $b * R' - c * R$, que siempre es real, y se sustituyen las expresiones (48) y (49) por R^2 , R'^2 , $R * R'$, entonces este cuadrado se convierte en:

$$= (a + g) * (2 * b * c * e - b^2 * (f - g) - c^2 * (d - g))$$

o, según la ecuación (46), que satisface $x = g$,

$$(b * R' - c * R)^2 = (a + g)^2 * (e^2 - (d - g) * (f - g)) \dots \dots \dots (56)$$

Ya que esta expresión debe ser positiva, lo cual solo ocurre para valores de g que se encuentran entre los límites

$$(d + f) / 2 - (e^2 + (d - f)^2 / 4)^{0,5} \text{ y } (d + f) / 2 + (e^2 + (d - f)^2 / 4)^{0,5}$$

entonces, estos límites son los límites de g . Cuando e desaparece, se convierten en d y f , entre los cuales se encuentra g .

§ 14.

Vuelvo de nuevo a la expresión (53) de P^2 . Ponemos en él

Segunda sección. Ejercicio 1

$$R^\circ * (\cos m)^\circ = R * \cos m + R' * \sin m$$

$$R^\circ * (\sin m)^\circ = (-R * \sin m + R' * \cos m) * \cos n \dots \dots \dots (57)$$

entonces también

$$P^2 = (\cos n)^2 * (3 * g - A + 2 * R^\circ * \cos (u - m^\circ)) / (1 - \sin n * \cos u)^2$$

y el R° ahora introducido puede expresarse muy simplemente por las tres raíces de la ecuación cúbica. Si una es en las expresiones

$$R^\circ = (R * \cos m + R' * \sin m)^2 + (R * \sin m - R' * \cos m)^2 * (\cos n)^2$$

$1 - (\sin n)^2$ en lugar de $(\cos n)^2$, toma la forma

$$R^{\circ 2} = (R^2 + R'^2 - (R * \sin m - R' * \cos m)^2 * (\sin n)^2$$

que, sustituyendo las expresiones (50) de $\sin m * \cos m$ y $\sin n * \cos n$ en:

$$R^{\circ 2} = R^2 + R'^2 - (b * R' - c * R)^2 / (a + g)^2$$

y por (48) y (56) en:

$$R^{\circ 2} = b^2 + c^2 - e^2 - a * (d + f) + d * f - 2 * g * (d + f - a) + 3 * g^2$$

se transforma la parte de esta expresión que es independiente de g siendo el segundo coeficiente de la ecuación (47), que multiplicado por $-2 * g$ es el primero; para que uno sea $= g * g' + g * g'' + g' * g''$ éste $= g + g' + g''$. Así se tiene

$$R^{\circ 2} = g * g' + g * g'' + g' * g'' - 2 * g * (g + g' + g'') + 3 * g^2 =$$

$$= (g - g') * (g - g'') \dots \dots \dots (58)$$

Segunda sección. Ejercicio 1

y, como también $3 * g - A = 2 * g - g' - g''$, la forma más simple de la expresión de P^2 :

$$P^2 = ((\cos n)^2 * (2 * g - g' - g'' + 2 * (g - g' * g - g'')^{0,5} * \cos (u - m^\circ))) / (1 - \sin n * \cos u)^2$$

o, si se quiere introducir $u - m^\circ$ como un ángulo indefinido y se quiere denotar por η ,

$$P^2 = (\cos n * (2 * g - g' - g'' + 2 * (g - g' * g - g'')^{0,5} * \cos \eta)^{0,5}) / (1 - \sin n * \cos (\eta + m^\circ)) \dots \dots \dots (59)$$

Para evitar cantidades imaginarias, incluso si g' y g'' son tales, se puede introducir el cuadrado siempre real de $g'' - g'$ en esta expresión, dándole la forma:

$$P = (\cos n * (3 * g - A + \cos \eta * ((3 * g - A)^2 - (g'' - g')^2)^{0,5})^{0,5}) / (1 - \sin n * \cos (\eta + m^\circ)) \dots \dots \dots (60)$$

lo que también demuestra inmediatamente que P puede o no desaparecer, según que $(g'' - g')^2$ sea negativa o positiva, o según que la ecuación cúbica tenga dos raíces imaginarias o sólo reales.

Evidentemente todo lo que se dijo sobre P en el último apartado (§ 13) también se aplica a P' , ya que ambos están en una relación entre sí que es independiente de p .

§ 15.

Para eliminar por completo el ángulo arbitrario p , las cantidades dependientes de p que también aparecen además de P en las expresiones de u, v, w también deben expresarse mediante el nuevo

Segunda sección. Ejercicio 1

ángulo arbitrario η . Daré las fórmulas por las que se obtiene la sustitución de p por η .

Si se escribe en lugar de $\cos p$ y $\sin p$:

$$\begin{aligned}\cos p &= \cos m * \cos (p - m) - \sin m * \sin (p - m) \\ \sin p &= \sin m * \cos (p - m) + \cos m * \sin (p - m)\end{aligned}$$

y luego aplicando la sustitución (51), obtenemos:

$$\begin{aligned}\cos p &= (-\sin n * \cos m + \cos m * \cos (\eta + m^\circ) - \\ &\quad - \cos n * \sin m * \sin (\eta + m^\circ)) / (1 - \sin n * \cos (\eta + m^\circ))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin p &= (-\sin n * \sin m + \sin m * \cos (\eta + m^\circ) + \\ &\quad + \cos n * \sin m * \sin (\eta + m^\circ)) / (1 - \sin n * \cos (\eta + m^\circ))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos p &= (-v + v' * \cos \eta + v'' * \sin \eta) / (\mu + \mu' * \cos \eta + \mu'' * \sin \eta) \\ \sin p &= (-\xi + \xi' * \cos \eta + \xi'' * \sin \eta) / (\mu + \mu' * \cos \eta + \mu'' * \sin \eta)\end{aligned}$$

donde los caracteres introducidos tienen el siguiente significado:

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \\ \mu' &= \sin n * \cos m^\circ \\ \mu'' &= -\sin n * \sin m^\circ \\ v &= \sin n * \cos m \\ v' &= \cos m * \cos m^\circ - \cos n * \sin m * \sin m^\circ \\ v'' &= -\cos m * \sin m^\circ - \cos n * \sin m * \cos m^\circ \\ \xi &= \sin n * \cos m \\ \xi' &= \sin m * \cos m^\circ + \cos n * \sin m * \sin m^\circ \\ \xi'' &= -\sin m * \sin m^\circ + \cos n * \sin m * \cos m^\circ \dots \dots (61)\end{aligned}$$

Segunda sección. Ejercicio 1

Estas expresiones de **cos p** y **sen p** deben estar en las expresiones a sustituirse por **u**, **v**, **w**. Las expresiones de **u**, **v**, **w**, que se hacen completamente dependientes de η , se simplifican si se parte de las fórmulas (32) y (32*), que, excepto en **P'**, contienen sólo la primera dimensión de **cos p** y **sen p**, y por lo tanto, después de ser multiplicados en el común denominador de las expresiones hechas dependientes de η , tanto de estas magnitudes como de **P'**, asumen evidentemente la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u * (D + D' * \cos \eta + D'' * \sin \eta + D''' * \Pi) = \\ = A + A' * \cos \eta + A'' * \sin \eta + A''' * \Pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v * (D + D' * \cos \eta + D'' * \sin \eta + D''' * \Pi) = \\ = B + B' * \cos \eta + B'' * \sin \eta + B''' * \Pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w * (D + D' * \cos \eta + D'' * \sin \eta + D''' * \Pi) = \\ = C + C' * \cos \eta + C'' * \sin \eta + C''' * \Pi \dots \dots \dots (62) \end{aligned}$$

Donde **A**, **A'**, , **B**, **B'** etc. son independientes de η y Π está escrita para

$$(2 * g - g' - g'' + 2 * (g - g' * g - g'')^{0,5} * \cos \eta)^{0,5}$$

Las expresiones correspondientes a las fórmulas (24) son menos simples, ya que estas fórmulas ya contienen la segunda dimensión de **cos p** y **sin p** en el tamaño **m''** y por lo tanto su transformación en η debe contener también la segunda dimensión de **cos η** y **sin η** . Si también se quiere saber el cambio de posición del punto de contacto de las limbos en el punto **Z**, para el punto de la Tierra determinado por **u**, **v**, **w**, se obtiene mediante la fórmula (54), que ahora se convierte en

$$\tan (p - m) / 2 = \tan (45^\circ + n / 2) * \tan (\eta + m^\circ) \dots \dots \dots (63)$$

He mencionado aquí sólo la forma de las expresiones de **u, v, w**, que se hacen totalmente dependientes de **η**, sin dar las expresiones de sus coeficientes. En esa forma aparece la solución del **ejercicio 1** en su forma más simple, sólo para las aplicaciones se preferirá buscar los valores de **μ, ν, ξ**, etc. y de **A, A',, B, B'** y así sucesivamente, que, si se da **η**, sólo requiere la búsqueda de **p** según la fórmula (63) y su aplicación en las fórmulas demandadas de los apartados **§ 7** y **§ 8**.

§ 16.

Los coeficientes **a, b, c,...** (40) tienen una propiedad, cuyo uso contribuye significativamente a facilitar la aplicación de las normas dadas, y por lo tanto debe afirmarse (asentarse) aquí. Dependen de **x, y, s, l, d**, cuyas magnitudes, durante el curso de un eclipse, los dos primeros cambian casi proporcionalmente con el tiempo, pero los tres últimos experimentan solo ligeros cambios. Como son funciones racionales completas de estas magnitudes, también lo son aproximadamente tales funciones del tiempo, por lo que una serie de sus valores, calculada para tiempos que transcurren en progresión aritmética, es también independiente de si sólo tiene el número de términos apropiados. En la medida en que estas funciones supongan pequeños cambios en el tiempo, debe ser posible interpolar. Si se considera la composición de las expresiones (40), se nota que el grado de las funciones del tiempo, que son aproximadamente iguales a ellas, para **a** es de **2do** (grado), para **b, c** son de **1er**, para **d, e, f** es de **0**; lo cual se sostiene bajo la suposición, que se prueba en todos los casos, de que **i² * x², i² * x * y, i² * y²** son cantidades muy pequeñas. Algo similar se puede observar de las expresiones (44) y (44*) de los coeficientes de expansión de **P'²**. Asumiré el caso en el que una excepción puede ocurrir solo en el

Segunda sección. Ejercicio 1

caso del contacto interno de los limbos del Sol y la Luna, a saber, el caso de una distancia comparativamente grande del vértice del cono de sombra lunar desde la Tierra, con x e y , en la que si h y k son pequeñas cantidades proporcionales al tiempo, y la pequeña cantidad q es cercana al segundo orden (grado) con respecto al tiempo. En el coeficiente a , $x^2 + Q^2 * y^2$ es aproximadamente de segundo orden, y q^2 es una magnitud menor de **4to**: por lo tanto, la serie de valores de a debe tener diferencias casi constantes de segundo (grado) y mucho más cercanas a constante del cuarto (grado). Los coeficientes b , c tienen, por una razón similar, primeras diferencias casi constantes y las terceras mucho más casi constantes; d , e , f tienen segundas diferencias casi constantes. Por tanto, se puede suponer a , b , c , d , e , f , para cualquier instante durante el curso de un eclipse, y para ser conocidos, habiendo calculado sus valores para cinco instantes, que, además, deben elegirse de tal manera en la forma en que la certeza de las interpolaciones generalmente lo requiere, por ende entonces, de modo que todo el curso (del eclipse) está contenido entre sus extremos. Si este cálculo se hace para **7 instantes de tiempo** a los que se aplican los números dados en el apartado § 4, entonces es una base más que suficiente para las interpolaciones.

Esta propiedad de los coeficientes a , b , c ... es propio calcular sus valores a partir de ellos, no para cada tiempo para el que se usan, sino de una vez por todas en los mismos instantes de tiempo para los que se han buscado los elementos del eclipse (§ 4). Continuaré pues aquí con el ejemplo tomado del eclipse solar del **15 de mayo de 1836**, pero sólo en relación al contacto externo de los limbos, siguiendo las fórmulas (26), (33), (35) y (44).

Suponiendo que la relación del eje de la Tierra = **300,7047:299,7047**,
o

Segunda sección. Ejercicio 1

$$(1 - e^2)^{0,5} = 0,996674479; e^2 = 0,006639983; e = 0,081486094$$

uno encuentra, para los instantes en el tiempo para los cuales se aplican las declaraciones en el apartado § 4:

Hora 1° Merid. Paris	σ	δ	ε	ρ	δ'
11h 15m 46s	122,133133588	+18° 57' 49,20"	-43' 58,183"	1,002985836	+18° 52' 34,34"
12h 15m 46s	122,152595696	+19° 03' 17,57"	-30' 26,123"	1,002985374	+18° 53' 08,01"
13h 15m 46s	122,169697911	+19° 08' 45,40"	-16' 54,138"	1,002985143	+18° 53' 41,65"
14h 15m 46s	122,184664314	+19° 14' 12,72"	-03' 22,224"	1,002984681	+18° 54' 15,26"
15h 15m 46s	122,197494118	+19° 19' 39,52"	+10' 09,619"	1,002984450	+18° 54' 48,85"
16h 15m 46s	122,208271069	+19° 25' 05,82"	+23' 41,388"	1,002983988	+18° 55' 22,40"
17h 15m 46s	122,216853917	+19° 30' 31,63"	+37' 13,185"	1,002983757	+18° 55' 55,92"

Además, se encuentran los valores de las pequeñas cantidades **h**, **k**, **q** introducidas en el apartado § 11

Hora 1° Merid. Paris	q	k	h
11h 15m 46s	+0,0116948	+0,0015265	-0,0127904
12h 15m 46s	+0,0017159	+0,0029552	-0,0088535
13h 15m 46s	-0,0039824	+0,0043816	-0,0049168
14h 15m 46s	-0,0054013	+0,0058056	-0,0009805
15h 15m 46s	-0,0025427	+0,0072271	+0,0029556
16h 15m 46s	+0,0045912	+0,0086462	+0,0068913
17h 15m 46s	+0,0159969	+0,0100629	+0,0108265

El valor de **sen λ** es el complemento aritmético del valor ya dado de **σ** ; la cantidad **$1 / \cos \lambda$** no sufre ningún cambio en el **7mo** lugar decimal durante el tiempo que abarcan los números informados y es = **0,0000146**; la cantidad de **tan λ** es por lo tanto = **complemento aritmético de $\sigma + 0,0000146$** . -También se pueden utilizar las fórmulas necesarias (35)

$$\rho * \sin \delta', \rho * \cos \delta', \sin \varepsilon / \cos \lambda, \\ \cos \varepsilon * \cos \delta / \cos \lambda, \cos \varepsilon * \sin \delta / \cos \lambda$$

Segunda sección. Ejercicio 1

para los **7 instantes en el tiempo**, e interpolar ligeramente entre ellos.

Los valores de los coeficientes de la expresión de P'^2 son, según las fórmulas (44):

Hora 1° Merid. Paris	a	b	c
11h 15m 46s	-1.443948	-0.035838	-0.881503
12h 15m 46s	-0.181852	+0.062898	-0.610438
13h 15m 46s	+0.557842	+0.161538	-0.339126
14h 15m 46s	+0.774840	+0.260054	-0.067641
15h 15m 46s	+0.469105	+0.358419	+0.203941
16h 15m 46s	-0.359146	+0.156604	+0.475544
17h 15m 46s	-1.709446	+0.554582	+0.747091

Hora 1° Merid. Paris	d	e	f
11h 15m 46s	-0,3204167	-0.0000062	-0.3184605
12h 15m 46s	-0.3205364	-0.0000084	-0.3184605
13h 15m 46s	-0.3206317	-0.0000069	-0.3187244
14h 15m 46s	-0.3207028	-0.0000017	-0.3188074
15h 15m 46s	-0.3207503	+0.0000068	-0.3188582
16h 15m 46s	-0.3207741	+0.0000191	-0.3188769
17h 15m 46s	-0.3207740	+0.0000348	-0.3188633

§ 17.

Tengo que decir algo aquí sobre la **interpolación**. En primer lugar, mostraré con un par de ejemplos hasta qué punto la propiedad de los coeficientes **a, b, c,...** anotados en el apartado (§ 16) anterior, se confirma en sus valores numéricos recién dados:

Hora 1° Merid. Paris	a	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$
11h 15m 46s	-1,443948000						
12h 15m 46s	-0,181852000	+1,262096000					
13h 15m 46s	+0,557842000	+0,739694000	-0,522402				
14h 15m 46s	+0,774840000	+0,216998000	-0,522696	-0,000294			
15h 15m 46s	+0,469105000	-0,305735000	-0,522733	-0,000037	+0,000257		
16h 15m 46s	-0,359146000	-0,828251000	-0,522516	+0,000217	+0,000254	-0,000003	
17h 15m 46s	-1,709446000	-1,350300000	-0,522049	+0,000467	+0,000250	-0,000004	-0,000001

Segunda sección. Ejercicio 1

Hora 1° Merid, Paris	b	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6
11h 15m 46s	-0,035838000						
12h 15m 46s	+0,062898000	+0,098736000					
13h 15m 46s	+0,161538000	+0,098640000	-0,000096				
14h 15m 46s	+0,260054000	+0,098516000	-0,000124	-0,000028			
15h 15m 46s	+0,358419000	+0,098365000	-0,000151	-0,000027	+0,000001		
16h 15m 46s	+0,456604000	+0,098185000	-0,000180	-0,000029	-0,000002	-0,000003	
15h 15m 46s	+0,554582000	+0,097978000	-0,000207	-0,000027	+0,000002	+0,000004	+0,000007

Se sabe que las fórmulas de interpolación más ventajosas, las de **Newton**, son las siguientes:

Caso I. Se dan dos valores de la cantidad a interpolar y cada diferencia impar, y un valor de cada diferencia par:

Esquema

Argumento	f * t	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6	...
-0,5	a ₁		c ₁		e ₁		g ₁	...
		b		d		f		...
+0,5	a ¹		c ¹		e ¹		g ¹	...

$$2 * a = a_1 + a^1, 2 * c = c_1 + c^1, 2 * e = e_1 + e^1, 2 * g = g_1 + g^1, \dots$$

$$\begin{aligned}
 f * t = & a + b * t + c * (t^2 - \frac{1}{4}) / 2 + d * t * (t^2 - \frac{1}{4}) / 6 + \\
 & + e * (t^2 - \frac{1}{4}) * (t^2 - 9/4) / 24 + \\
 & + f * t * (t^2 - \frac{1}{4}) * (t^2 - 9/4) / 120 + \\
 & + g * (t^2 - \frac{1}{4}) * (t^2 - 9/4) * (t^2 - 25/4) / 720 + \dots
 \end{aligned}$$

Caso II. Se da un valor de la cantidad a interpolar y cada diferencia par, y dos valores de cada diferencia impar:

Esquema

Argumento	f * t	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6	...
		b ₁		d ₁		f ₁		...
0	a		c		e		g	...
		b ¹		d ¹		f ¹		...

Segunda sección. Ejercicio 1

$$2 * b = b_1 + b^1, 2 * d = d_1 + d^1, 2 * f = f_1 + f^1, 2 * h = h_1 + h^1, \dots$$

$$\begin{aligned} f * t = & a + b * t + c * t^2 / 2 + \\ & + d * t * (t^2 - 1) / 6 + e * t^2 * (t^2 - 1) / 24 + \\ & + f * t * (t^2 - 1) * (t^2 - 4) / 120 + \\ & + g * t^2 * (t^2 - 1) * (t^2 - 4) / 720 + \dots \end{aligned}$$

Estas fórmulas son más ventajosas cuando t se toma dentro de $\pm \frac{1}{2}$, lo que siempre se puede hacer cuando los valores dados de $f * t$ oscilan indefinidamente por encima y por debajo (de esos valores), y aparte de que ninguna de las cantidades a, b, c, d, \dots se suponen que se conocen.

Pero si, como suele ser el caso, y también en la presente solicitud, sólo se da un rango limitado de valores de $f * t$, y por lo tanto de a, b, c, d, \dots , al principio y al final del mismo, solo están presentes más o menos (respecto) de los anteriores, o bien t debe ser de la primera serie completa de a, b, c, \dots volviendo al principio y contar hacia adelante desde el último hasta el final; o si t debe permanecer siempre entre $\pm \frac{1}{2}$, los términos faltantes de la serie de a, b, c, \dots deben ser reemplazados al principio por el mayor y al final por el menor de los números presentes en la serie de la diferencia. Luego daré las fórmulas a utilizar, que siguen a las de **Newton** en la medida de lo posible. Para poder escribirlas brevemente, denotaré el producto, en progresión aritmética, de una serie de factores crecientes de 1 en 1 , siendo el primero $t + a$, el último $t + b$, por $[a, b]$, por ejemplo **B**.

$$(t - 3) * (t - 2) * (t - 1) * t * (t + 1) \text{ entre } [-3, 1] \text{ o } [1, -3]$$

$$(t - 5/2) * (t - 3/2) * (t - 1/2) * t * (t + 1/2) \text{ entre } [-5/2, 1/2] \text{ o } [1/2, -3/2]$$

Segunda sección. Ejercicio 1

el producto $2 * 3 * 4 \dots n$ sino por $[n]$; para que, por ej. **B.** las dos fórmulas de interpolación de newtonianas se denotan de la siguiente manera:

Caso I.

$$\begin{aligned} f * t = & a + t * b + \\ & + c * [-1/2, 1/2] / [2] + t * d * [-1/2, 1/2] / [3] + \\ & + e * [-3/2, 3/2] / [4] + t * f * [-3/2, 3/2] / [5] + \\ & + g * [-5/2, 5/2] / [5] + \dots \end{aligned}$$

Caso II.

$$\begin{aligned} f * t = & a + t * b + \\ & + c * t^2 / [2] + d * [-1, 1] / [3] + \\ & + e * t * [-1, 1] / [4] + f * [-2, 2] / [5] + \\ & + g * t * [-2, 2] / [6] + \dots \end{aligned}$$

De acuerdo con esta notación, cuando se trabaja para las fórmulas de **Newton**, se debe abreviar en ambos casos

$$a + N(1) * b + N(2) * c + N(3) * d + N(4) * e + N(5) * f + N(6) * g + \dots$$

escribiendo:

Caso I.

Al principio falta la c_1 y la siguiente

$$\begin{aligned} a + N(1) * b + \Delta 2 * N(2) + \\ + \Delta 3 * [1/2, -3/2] / [3] + \Delta 4 * [1/2, -5/2] / [4] + \dots \end{aligned}$$

Al principio falta la e_1 y la siguiente

$$\begin{aligned} a + N(1) * b + N(2) * c + N(3) * d + N(4) * \Delta 4 + \\ + \Delta 5 * [3/2, -5/2] / [5] + \Delta 6 * [3/2, -7/2] / [6] + \dots \end{aligned}$$

Al principio falta la g_1 y la siguiente

Segunda sección. Ejercicio 1

$$a + N(1) * b + N(2) * c + N(3) * d + N(4) * e + N(5) * f + N(6) * \Delta 6 + \\ + \Delta 7 * [5/2, -7/2] / [7] + \dots$$

etc.

Al final falta la g^1 y la siguiente

$$a + N(1) * b + N(2) * c + N(3) * d + N(4) * e + N(5) * f + N(6) * \Delta 6 + \\ + \Delta 7 * [-5/2, 7/2] / [7] + \dots$$

Al final falta la e^1 y la siguiente

$$a + N(1) * b + N(2) * c + N(3) * d + N(4) * \Delta 4 + \\ + \Delta 5 * [-3/2, 5/2] / [5] + \Delta 6 * [-3/2, 7/2] / [6] + \dots$$

Al final falta la c^1 y la siguiente

$$a + N(1) * b + \Delta 2 * N(2) + \\ + \Delta 3 * [-1/2, 3/2] / [3] + \Delta 4 * [-1/2, 5/2] / [4] + \dots$$

Caso II.

Al principio falta la b_1 y la siguiente

$$a + N(1) * \Delta 1 + \Delta 2 * [0, -1] / [2] + \\ + \Delta 3 * [0, -2] / [3] + \Delta 4 * [0, -3] / [4] + \dots$$

Al principio falta la d_1 y la siguiente

$$a + N(1) * b + N(2) * c + N(3) * \Delta 3 + \\ + \Delta 4 * [1, -2] / [4] + \Delta 5 * [1, -3] / [5] + \dots$$

Al principio falta la f_1 y la siguiente

$$a + N(1) * b + N(2) * c + N(3) * d + N(4) * e + N(5) * \Delta 5 + \\ + \Delta 6 * [2, -3] / [6] + \dots$$

etc.

Al final falta la f^1 y la siguiente

Segunda sección. Ejercicio 1

$$a + N(1) * b + N(2) * c + N(3) * d + N(4) * e + N(5) * \Delta 5 + \\ + \Delta 6 * [-2, 3] / [6] + \dots$$

Al final falta la d^1 y la siguiente

$$a + N(1) * b + N(2) * c + N(3) * \Delta 3 + \\ + \Delta 4 * [-1, 2] / [4] + \Delta 5 * [-1, 3] / [5] + \dots$$

Al final falta la b^1 y la siguiente

$$a + N(1) * \Delta 1 + \Delta 2 * [0, 1] / [2] + \\ + \Delta 3 * [0, 2] / [3] + \Delta 4 * [0, 3] / [4] + \dots$$

Como es bien sabido, la aplicación de la fórmula de Interpolación se vuelve más fácil si uno cambia gradualmente sus términos anteriores teniendo en cuenta los posteriores. Para que se puedan encontrar aquí juntas las fórmulas que son necesarias para la ejecución de las interpolaciones requeridas en el presente tratado, también haré este cambio, siempre que no se vaya más allá de las 4° **diferencias** y se proceda según el **Caso I**, a saber:

1ra división:

$$d^1 = \Delta 3 + \Delta 4 * (t - 5/2) / 4, c^1 = \Delta 2 + d^1 * (t - 3/2) / 3, \\ b^1 = b + t * c^1 / 2, a^1 = a - c^1 / 8$$

2da división:

$$c^1 = c + \Delta 4 * (t^2 - 9/4) / 12, b^1 = b + d * (t^2 - 1/4) / 6, \\ a^1 = a + c^1 * (t^2 - 1/4) / 2$$

3da división:

$$c^1 = c + e * (t^2 - 9/4) / 12, b^1 = b + d * (t^2 - 1/4) / 6, \\ a^1 = a + c^1 * (t^2 - 1/4) / 2$$

etc.

penúltimo

$$c^1 = c + \Delta 4 * (t^2 - 9/4) / 12, b^1 = b + d * (t^2 - 1/4) / 6, \\ a^1 = a + c^1 * (t^2 - 1/4) / 2$$

último

Segunda sección. Ejercicio 1

$$d^1 = \Delta 3 + \Delta 4 * (t + 5/2) / 4, c^1 = \Delta 2 + d^1 * (t + 3/2) / 3, \\ b^1 = b + t * c^1 / 2, a^1 = a - c^1 / 8$$

Después de que a^1 y b^1 se han dado a conocer, se (tiene)

$$f * t = a^1 + t * b^1$$

Las diferencias de una serie de valores numéricos de una función convergen, en general, solo al principio; después divergen como consecuencia de la aproximación limitada de los mismos números, de los que se derivan. Como cada uno de estos valores pueden ser erróneos en media unidad de su último (dígito) decimal, todo número de la primera serie diferencial puede ser erróneo en una unidad, cada uno de la segunda (serie diferencial) en **2 unidades**, cada uno de la tercera en **4** (unidades), y así sucesivamente. Por lo general, los errores no alcanzarán este tamaño, ya que los errores en la serie calculada generalmente no serán tan grandes como pueden ocurrir y los que realmente están presentes en ella no sucederán fácilmente en el orden más desventajoso; pero aun así no es necesario ni generalmente ventajoso continuar con una fórmula de interpolación a una serie de diferencias, cuyos números puedan estar completamente distorsionados por la causa que acabamos de exponer. En el primero de los dos casos citados al comienzo de este apartado, por ejemplo la interpolación con la **4ta**, para terminar en el segundo con la **3ra** fila de diferencias.

§ 18.

Hay dos casos de eclipses, arriba ya separados entre sí en diferentes lugares, que no pueden tratarse de acuerdo con las mismas reglas, a saber, el caso de una distancia comparativamente grande de la punta del cono de sombra lunar desde la Tierra con **x** e **y**, y el caso de contarse en el orden de estas magnitudes. Aquel es el más

Segunda sección. Ejercicio 1

común; este (otro) tiene lugar sólo en el contacto interior de los limbos del Sol y de la Luna. Para no poder seguir pasando de uno a otro, dejaré ahora el **segundo caso** por completo y sólo volveré a él al final de esta sección, en el (apartado) § 28. Hasta entonces, solo hablaremos de las fórmulas (31), (32), (44).

Varias partes de lo anterior requieren mayor elaboración, que daré en este § 18. Primero daré lo que creo que es la forma más fácil de encontrar la raíz cuadrada de **g** de la ecuación cúbica (47). Mostré en el apartado § 13 que se encuentra entre los límites

$$(d + f) / 2 - ((e^2 + (d - f)^2 / 4)^{0,5} \text{ y } (d + f) / 2 + ((e^2 + (d - f)^2 / 4)^{0,5}$$

Entonces se escribe

$$g = (d + f) / 2 + z$$

entonces **z** es una pequeña cantidad que no se encuentra fuera de los límites $\pm((e^2 + (d - f)^2 / 4)^{0,5}$, y la sustitución de esta expresión de la raíz cuadrada convierte a la ecuación cúbica, en su forma (46), en:

$$0 = -(a + ((d + f) / 2 + z) * (e^2 + (f - d)^2 / 4 - z^2) + z * (b^2 + c^2) - (b^2 - c^2) * (f - d) / 2 + 2 * b * c * e$$

la cual también puede ser escrita:

$$z = ((b^2 - c^2) * (f - d) / 2 - 2 * b * c * e + (a + (f + d) / 2) * (e^2 + (f - d)^2 / 4)) / (b^2 + c^2 - e^2 - (f - d)^2 / 4 + z * (a + (f + d) / 2) + z^2) \dots \dots \dots (64)$$

De esta forma, la ecuación es adecuada para obtener **z** por aproximaciones sucesivas, la primera de las cuales se obtiene omitiendo la parte del denominador que depende de **z**. Sin

Segunda sección. Ejercicio 1

embargo, esta ventaja se pierde cuando $b^2 + c^2$ es una pequeña cantidad del orden $f - d$ y e , cuyo caso, además, se produce sólo cuando el eje del cono de sombra lunar pasa muy cerca del centro de la Tierra, y entonces sólo se da para un corto tiempo.

Las cantidades que aparecen, aquí tienen la propiedad indicada en el (apartado) § 16, de modo que sus valores numéricos, calculados para los intervalos de tiempo a los que se aplican en las declaraciones (en los apartados) § 4 y § 16, pueden interpolarse como allí. Abreviaré la ecuación denotándola como

$$z = \mu / (v + \xi * z + z^2) \dots \dots \dots (64^*)$$

y escribiendo los valores μ , v , ξ seguidamente (en unas tablas):

Hora 1° Merid. Paris	μ	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$
11h 15m 46s	-0,000760070					
12h 15m 46s	-0,000356420	+0,00040365				
13h 15m 46s	-0,000085330	+0,00027109	-0,00013256			
14h 15m 46s	+0,000060100	+0,00014543	-0,00012566	+0,00000690		
15h 15m 46s	+0,000081320	+0,00002122	-0,00012421	+0,00000145	-0,00000545	
16h 15m 46s	-0,000025630	-0,00010695	-0,00012817	-0,00000396	-0,00000541	+0,00000004
15h 15m 46s	-0,000270120	-0,00024449	-0,00013754	-0,00000937	-0,00000541	+0,00000000

Hora 1° Merid, Paris	v	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$
11h 15m 46s	+0,778330200					
12h 15m 46s	+0,376590300	-0,40173990				
13h 15m 46s	+0,141099900	-0,23549040	+0,16624950			
14h 15m 46s	+0,072202600	-0,06889730	+0,16659310	0,00034360		
15h 15m 46s	+0,170055300	+0,09785270	+0,16675000	++0,00015690	-0,00018670	
16h 15m 46s	+0,434628200	+0,26457290	+0,16672020	-0,00002980	-0,00018670	+0,00000000
15h 15m 46s	+0,865704900	+0,43107670	+0,16650380	-0,00021640	-0,00018660	+0,00000010

Hora 1° Merid, Paris	ξ	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$
11h 15m 46s	-1,763386600						
12h 15m 46s	-0,501424600	+1,26196200					
13h 15m 46s	+0,238164000	+0,73958860	-0,52237340				
14h 15m 46s	+0,455084900	+0,21692090	-0,52266770	-0,00029430			
15h 15m 46s	+0,149300800	-0,30578410	-0,52270500	-0,00003730	+0,00025700		
16h 15m 46s	-0,678971500	-0,82827230	-0,52248820	+0,00021680	+0,00025410	-0,00000290	

Segunda sección. Ejercicio 1

15h 15m 46s	-2,029264600	-1,35029310	-0,52202080	+0,00046740	+0,00025060	-0,00000350	-0,000001
-------------	--------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-----------

Si se conoce la raíz g de la ecuación cúbica, sus dos raíces restantes g' y g'' se obtienen resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - A * x^2 + B * x - C - (g^3 - A * g^2 + B * g - C) \\ &= (x - g) * (x^2 - (A - g) * x + B - A * g + g^2) \\ &= (x - g) * (x^2 - (A - g) * x + C / g) \end{aligned}$$

(utilizando) cualquiera, excepto (donde) $x = g$, también

$$\begin{aligned} x = g' &= (A - g) / 2 + (((A - g) / 2)^2 - C / g)^{0,5} \\ x = g'' &= (A - g) / 2 - (((A - g) / 2)^2 - C / g)^{0,5} \end{aligned}$$

Sin embargo, la expresión (60) de P , para la cual ahora se escribe P' , no presupone tanto a g' como a g'' como el cuadrado de su diferencia conocida, desde las expresiones que se acaban de dar surge:

$$(g'' - g')^2 = (A - g)^2 - 4 * C / g \dots \dots \dots (65)$$

Si uno sustituye esto en aquella expresión, se convierte en:

$$\begin{aligned} P' &= \cos n * (3 * g - A + \cos \eta * 2 * (g * (2 * g - A) + C / g)^{0,5})^{0,5} / \\ & \quad / (1 - \sin n * \cos (h + m^\circ)) \dots \dots \dots (66) \end{aligned}$$

o bien, si se introduce la pequeña cantidad z en lugar de g y se escribe $d + f - a$ para A

$$\begin{aligned} P' &= \cos n * (a + (f + d) / 2 + 3 * z + \cos \eta * 2 * \\ & \quad * (((f + d) / 2 + z) * (a + 2 * z) + C / ((f + d) + z)))^{0,5})^{0,5} / \\ & \quad / (1 - \sin n * \cos (h + m^\circ)) \dots \dots \dots (67) \end{aligned}$$

Segunda sección. Ejercicio 1

Para utilizar esta fórmula, se deben conocer, además de z , los valores de

$$a + (f + d) / 2, (f + d) / 2, a, C$$

El primero de estos ya ha sido utilizado en la solución de la ecuación cúbica (64*) bajo la designación ξ ; si se busca por interpolación a partir de sus valores ya dados para las **7 veces (instantes)**, y $(f + d) / 2$ y C por otras interpolaciones, entonces se encuentra todo lo que la fórmula supone saber, en que a es la diferencia entre los dos primeros valores.

Las interpolaciones de $(f + d) / 2$ y C son muy fáciles ya que estas cantidades cambian lentamente. Les dejo, a continuación, los **7 valores** de $(f + d) / 2$ y $-C$, así como el primero resulta de la información del apartado § 16 y el segundo de la fórmula (55*).

Hora 1° Merid, Paris	$(f + d) / 2$	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$
11h 15m 46s	-0,319438600					
12h 15m 46s	-0,319572700	-0,00013410				
13h 15m 46s	-0,319678100	-0,00010540	+0,00002870			
14h 15m 46s	-0,319755100	-0,00007700	+0,00002840	-0,00000030		
15h 15m 46s	-0,319804300	-0,00004920	+0,00002780	-0,00000060	-0,00000030	
16h 15m 46s	-0,319825500	-0,00002120	+0,00002800	+0,00000020	+0,00000080	+0,00000110
15h 15m 46s	-0,319818700	+0,00000680	+0,00002800	+0,00000000	-0,00000020	-0,00000100

Hora 1° Merid. Paris	$-C$	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$
11h 15m 46s	0,102046990					
12h 15m 46s	0,102132603	+0,000085613				
13h 15m 46s	0,102199977	+0,000067375	-0,00001824			
14h 15m 46s	0,102249313	+0,000049336	-0,00001804	+0,00000020		
15h 15m 46s	0,102280773	+0,000031459	-0,00001788	+0,00000016	-0,00000004	
16h 15m 46s	0,102294386	+0,000013613	-0,00001785	+0,00000003	-0,00000013	-0,00000009
15h 15m 46s	0,102289958	-0,000004428	-0,00001804	-0,00000020	-0,00000023	-0,00000009

La manera de calcular los ángulos n , m , m° también requiere mayor elaboración, ya que la pequeñez de $d - g$ y $f - g$ hace que R y R' sean ligeramente menores o mayores que b y c y que por lo tanto los numeradores de las fórmulas (50) son generalmente mucho más

Segunda sección. Ejercicio 1

pequeños que las cantidades por las que se dan; con el resultado de que **n** y **m** se encuentran con estas fórmulas con mucha menos precisión de lo que se debe al cuidado puesto en su cálculo. Este inconveniente se evita con las siguientes prescripciones, en las que introduciré **z** en lugar de **g**, y también escribiré el signo ξ ya utilizado para $a + (f + d) / 2$:

Caso I.

$a + g = \xi + z * u * d - g =$ $= -(f - d) / 2$ teniendo	el mismo signo
Entonces con ψ se determina tal que . .	$\sin \psi = -(\xi + z) * ((f - d) / 2 + z)^{0,5} / b$
con eso se convierte	$R = b * \cos \psi$
y $\sin n * \cos m$	$= -((f - d) / 2 + z) / (\xi + z)^{0,5} * (\tan \psi) / 2$
que se toma con el signo de	$b / (a + g)$

Caso II.

$a + g = \xi + z * u * d - g =$ $= -(f - d) / 2$ teniendo	distinto signo
Entonces con ψ se determina tal que . .	$\tan \psi = ((\xi + z) * ((f - d) / 2 + z))^{0,5} / b$
con eso se convierte	$R = b / \cos \psi$
y $\sin n * \cos m$	$= ((f - d) / 2 + z) / (\xi + z)^{0,5} * (\tan \psi) / 2$
que se toma con el signo de	$-b / (a + g)$

El ángulo ψ se toma $< 90^\circ$ si **b** y **R** tienen el mismo signo, $> 90^\circ$ si son diferentes. $\sin n * \sin m$ se puede encontrar a partir de **c**, $a + g$, $f - g = (f - d) / 2 - z$ de la misma manera.

Dado que $a + g + (b - R) * \cos p + (c - R') * \sin p$ debe entenderse como el de los dos factores (45) en los que la suma de los cuadrados de los coeficientes de $\cos p$ y $\sin p$ es menor que en el otro (§ 12) y

Segunda sección. Ejercicio 1

como $R * R' = b * c - e * (a + g)$, entonces R y b , así como R' y c , deben tomarse siempre con los mismos signos si $b * c$ y $b * c - e * (a + g)$ tienen el mismo signo, que suele ser el caso debido al pequeño tamaño de e . Sin embargo, si ocurre lo contrario, entonces R y b , o R' y c son de signos opuestos, y la arbitrariedad resultante (si fuera necesaria una decisión) debe eliminarse de tal manera que la elección que sea hecha es la suma menor de los cuadrados de los coeficientes de $\cos p$ y $\sin p$.

Después de encontrar m con la debida precisión, m° se calcula mediante las fórmulas (57). Si se introduce un ángulo auxiliar μ , de modo que

$$\tan \mu = R' / R$$

y se tiene

$$\begin{aligned} R^\circ * \cos m^\circ &= R * \cos (\mu - m) / \cos \mu = R' * \cos (\mu - m) / \sin \mu \\ R^\circ * \sin m^\circ &= R * \sin (\mu - m) * \cos n / \cos \mu = \\ &= R' * \sin (\mu - m) * \cos n / \sin \mu \dots \dots \dots (68) \end{aligned}$$

y el valor de R° que resulta de esto al mismo tiempo que m° debe concordar con el expresado en la fórmula (67).

§ 19.

Cada vez que la resolución de la tarea con la que me ocupo desde el apartado § 6 en adelante, se exigirá también la distinción de los puntos de la curva que le corresponde, donde se ve el principio y el fin del oscurecimiento.

Por lo tanto, es necesario responder a la pregunta:

Segunda sección. Ejercicio 1

Si en un punto dado sobre la Tierra desde el cual se ven tocar los limbos (contactos de los limbos de la Luna con el Sol) ¿se observa el principio o el final del eclipse?

Un punto sobre la Tierra que en el tiempo t ve el contacto de los limbos ve claramente el comienzo o el final del eclipse, dependiendo de si está dentro o fuera del cono de sombra lunar en el próximo tiempo $t + dt$. El primer (contacto) u otro tiene lugar según $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ que (se da) en el tiempo $t = (s - \zeta)^2 * (\tan f)^2 = (s - \zeta)^2 * i^2$ (2), durante el tiempo infinitamente pequeño dt se hace más pequeño o se vuelve mayor que la última magnitud. La condición, por lo tanto, de un contacto de los limbos (de ambos astros) perteneciente al comienzo o al final de un eclipse, es que el cociente diferencial de

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - i^2 * (s - \zeta)^2,$$

o

$$(x - \xi) * ((dx - d\xi) / dt) + (y - \eta) * ((dy - d\eta) / dt) - i^2 * (s - \zeta)^2 * ((ds - d\zeta) / dt) - i * (s - \zeta)^2 * (di / dt)$$

o, según las ecuaciones (2) sea negativo o positivo

$$(s - \zeta) * (\sin p * ((dx - d\xi) / dt) + \cos p * ((dy - d\eta) / dt) - i * ((ds - d\zeta) / dt) - (s - \zeta) * (di / dt)) \dots \dots \dots (69)$$

Los valores de las derivadas (valores diferenciales) de $x, y, s, i, \mu' - a$ y d se pueden encontrar a partir de los valores calculados por hora de estas cantidades (§ 4), diferenciando sus fórmulas de interpolación; sólo las expresiones de las derivadas (valores diferenciales) de ξ, η, ζ , en relación con los dos últimos, deben derivarse de las fórmulas (16) y (17). Las fórmulas (16) dan como resultado:

Segunda sección. Ejercicio 1

$$\begin{aligned} du / dt &= v * (d(\mu' - a) / dt) \\ &= (-\eta * \sin d + \zeta * \cos d) * (d(\mu' - a) / dt) \\ dv / dt &= -u * (d(\mu' - a) / dt) = -\xi * (d(\mu' - a) / dt) \\ dw / dt &= 0 \end{aligned}$$

por lo que se obtiene de (17):

$$\begin{aligned} d\zeta / dt &= -\xi * \cos d * (d(\mu' - a) / dt) + \eta * (dd / dt) \\ d\eta / dt &= \xi * \sin d * (d(\mu' - a) / dt) - \zeta * (dd / dt) \\ d\xi / dt &= (-\eta * \sin d + \zeta * \cos d) * (d(\mu' - a) / dt) \end{aligned}$$

Si uno crea ξ y η por las ecuaciones (2), a saber continúa:

$$\begin{aligned} \xi &= x - (s - \zeta) * i * \sin p \\ \eta &= y - (s - \zeta) * i * \cos p \end{aligned}$$

también lo harán estas expresiones

$$\begin{aligned} d\zeta / dt &= -(x - (s - \zeta) * i * \sin p) * \cos d * (d(\mu' - a) / dt) \\ &\quad + (y - (s - \zeta) * i * \cos p) * (dd / dt) \\ d\eta / dt &= (x - (s - \zeta) * i * \sin p) * \sin d * (d(\mu' - a) / dt) \\ &\quad - (\zeta * dd / dt) \\ d\xi / dt &= -(y - (s - \zeta) * i * \cos p) * \sin d * (d(\mu' - a) / dt) \\ &\quad + \zeta * \cos d * (d(\mu' - a) / dt) \end{aligned}$$

y su sustitución da a la expresión (69) la forma:

$$(s - \zeta) * (V - W * \zeta) \dots \dots \dots (70)$$

donde el significado de **V** y **W** es el siguiente:

Segunda sección. Ejercicio 1

$$\begin{aligned}
 V = & ((dy / dt) - x * \sin d * (d(\mu' - a) / dt) - \\
 & - s * i^2 * (dd / dt)) * \cos p + \\
 & + ((dx / dt) + y * \sin d * (d(\mu' - a) / dt) + \\
 & + s * i^2 * \cos d * (d(\mu' - a) / dt)) * \sin p - \\
 & - i * x * \cos d * (d(\mu' - a) / dt) + \\
 & + i * y * (dd / dt) - i * (ds / dt) - (di / dt)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V = & -(1 + i^2) * (dd / dt) * \cos p + \\
 & + (1 + i^2) * \cos d * (d(\mu' - a) / dt) * \sin p - (di / dt)
 \end{aligned}$$

La solución del **ejercicio 1**, que se persigue exclusivamente desde el (apartado) **§ 18** y procede desde las fórmulas **(31)**, **(32)**, no conduce directamente a la cantidad de ζ , sino se llega a la determinación de

$$\zeta' = ((P' - \theta') * s) / (\sigma^2 - 1)^{0,5}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta = & (s * \zeta') / (s + \zeta') = \\
 = & (((P' - \theta') * s) / (\sigma^2 - 1)^{0,5}) / (1 + (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5})
 \end{aligned}$$

y la expresión **(69)** se transforma

$$s * (V - (W * s - V) * (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5}) / (1 + (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5})$$

Como sólo se aplica al signo de esta expresión, el denominador, que siempre es positivo, se puede omitir y, por lo tanto, la expresión puede tener un valor negativo o positivo

$$s * (V - (W * s - V) * (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5}) = s * (V - W' * (P' - \theta'))$$

y considerarse como una condición del comienzo o el final del eclipse.

Segunda sección. Ejercicio 1

Dado que **V** y **W**, y por tanto también el factor multiplicado en **P' - θ'**, contienen **cos p** y **sen p** sólo en la primera dimensión, esta expresión puede escribirse:

$$s * (\alpha + b * \cos p + c * \sin p + (\alpha' + b' * \cos p + c' * \sin p) * (P' - \theta')) \dots \dots \dots (71)$$

donde **α**, **b**, **c**, etc. tienen el significado:

$$\alpha = -i * x * \cos d * (d(\mu' - a) / dt) + i * y * (dd / dt) - i * (dd / dt) - s * (di / dt)$$

$$b = (dy / dt) - x * \sin d * (d(\mu' - a) / dt) - s * i^2 * (dd / dt)$$

$$c = (dx / dt) + y * \sin d * (d(\mu' - a) / dt) + s * i^2 * \cos d * (d(\mu' - a) / dt)$$

$$\alpha' = s * ((i * x / s) * \cos d * (d(\mu' - a) / dt) - (i * y / s) * (dd / dt) + (i / s) * (ds / dt)) / (\sigma^2 - 1)^{0,5}$$

$$b' = s * (-(1 / s) * (dy / dt) + (x / s) * \sin d * (d(\mu' - a) / dt) - (dd / dt)) / (\sigma^2 - 1)^{0,5}$$

$$c' = s * (-(1 / s) * (dx / dt) + (y / s) * \sin d * (d(\mu' - a) / dt) + \cos d * (d(\mu' - a) / dt)) / (\sigma^2 - 1)^{0,5}$$

Si se supone que los valores de estas magnitudes se calculan de hora en hora, entonces la decisión requerida se vuelve lo más fácil posible.

Habitualmente el signo de la expresión (71) resultante de esta decisión surgirá de una encuesta que presupone sólo un conocimiento aproximado de los valores de **α**, **b**, **c**, etc.; pero en

Segunda sección. Ejercicio 1

todos los casos en que la oscuridad en el punto de la Tierra en que se tocan los limbos (de ambos astros) alcanza una magnitud muy pequeña, (por ello) es necesaria una mayor precisión; habrá también un segundo uso de las mismas magnitudes que así lo demande.

Comparto aquí sus valores calculados:

Hora 1° Merid, Paris	a	b	c
11h 15m 46s	+0,001662000	+0,30669700	+0,47584200
12h 15m 46s	+0,001132000	+0,26568100	+0,49077000
13h 15m 46s	+0,000602000	+0,22460050	+0,50566100
14h 15m 46s	+0,000071000	+0,18345900	+0,52051300
15h 15m 46s	-0,000460000	+0,14226000	+0,53532400
16h 15m 46s	-0,000990000	+0,10100700	+0,55009100
15h 15m 46s	-0,001521000	+0,05970300	+0,56481400

Hora 1° Merid, Paris	a'	b'	c'
11h 15m 46s	-0,000014000	-0,00267500	+0,24366200
12h 15m 46s	-0,000009000	-0,06233900	+0,24353600
13h 15m 46s	-0,000005000	-0,00200200	+0,24340600
14h 15m 46s	-0,000001000	-0,00166500	+0,24327200
15h 15m 46s	+0,000004000	-0,00132700	+0,24313400
16h 15m 46s	+0,000008000	-0,00098900	+0,24299200
15h 15m 46s	+0,000012000	-0,00065100	+0,24284600

§ 20.

Por lo anterior, se vuelven accesibles (más fáciles) los ejercicios, mediante cuya resolución deberá lograrse la limitación del tiempo y espacio de visibilidad de un eclipse exigida en el apartado § 5. Primeros ejemplos:

Ejercicio 2.

Determinar los horas del primer y último contacto de los limbos de la Luna y del Sol en el horizonte, y también los puntos sobre la Tierra donde se ven este primer y último contacto.

Las horas y los puntos sobre la Tierra requeridos aquí son obviamente los correspondientes a los contactos de las superficie del cono de sombra lunar con la Tierra. Por lo tanto, el vértice del cono de sombra lunar debe aparecer en el horizonte, o, según el apartado § 6, $P = 0$; además, las horas deben elegirse de tal manera que el cumplimiento de esta condición sea imposible inmediatamente antes o inmediatamente después.

Según el apartado § 12, estos son los horas en que la ecuación cúbica (47) pierde dos raíces reales y toma dos imaginarias, o viceversa; es decir, los horas en que las dos raíces g' y g'' se vuelven iguales entre sí. De aquí continua que las condiciones de desaparición de las expresiones (65) y (66) dan las dos ecuaciones de cuya solución continua la solución de nuestro problema, a saber:

$$0 = (A - g)^2 - A * C / g$$

$$0 = 3 * g - A + \cos \eta * (4 * g * (2 * g - A) + 4 * C / g) \dots (72)$$

Segunda sección. Ejercicio 2

Si, según la primera ecuación, en la segunda escribimos $4 * C = g * (A - g)^2$, esta se convierte en:

$$0 = 3 * g - A \pm \cos \eta * (3 * g - A)$$

donde el doble signo debe entenderse de modo que $\pm (3 * g - A)$ se vuelva positivo, como requiere la suposición positiva de la raíz cuadrada.

Esta ecuación requiere, por lo tanto, que en el caso de un valor positivo de $(3 * g - A)$, $1 + \cos \eta = 0$ o $\cos \eta = -1$, en el caso de un valor negativo es, $-1 + \cos \eta = 0$ o $\cos \eta = 1$.

En el caso en que sólo g sea positivo, es decir, en el caso en que el vértice del cono de sombra lunar esté en el interior de la Tierra, evidentemente ninguna línea recta en la superficie del primero (del cono de sombra lunar), y menos aún esta superficie misma, puede tocar el Tierra. Dado que g aquí (en este ejemplo) es siempre negativa, y también lo es C (§ 13), el último término de la primera de las ecuaciones (72) es siempre negativo y se puede dividir en dos factores reales, quedando convertido en:

$$0 = (A - g - 2 * (C / g)^{0,5}) * (A - g + 2 * (C / g)^{0,5})$$

La desaparición del primero de estos dos factores determina las horas de los dos contactos exteriores del cono de sombra lunar y con la Tierra, que ya están indicados en el apartado § 5 por τ y τ' ; la desaparición del segundo, en cambio, determina las horas de los dos contactos internos de ambas superficies, denotados por τ y τ' , que corresponden no menos a las condiciones (72). Queda claro que su eliminación se produce en este orden por el hecho de que $(g'' - g')^2$ que resulta, es decir, tanto hasta τ como después de τ' , y desde τ hasta τ' , producto positivo de ambos factores, fuera del primero y

Segunda sección. Ejercicio 2

dentro el segundo límite, exige la igualdad de signo de ambos; cuyo signo fuera de los primeros límites sólo puede ser el positivo, porque **A**, y más aún el segundo factor, es suficientemente positivo mucho antes y después del instante del encuentro de los dos cuerpos celestes y ya no desaparece antes de τ y después de τ' ; cuyo signo es también el negativo dentro de los segundos límites, porque entonces el cono de sombra lunar está completamente dentro de la (superficie de la) Tierra y por lo tanto g' y g'' , según el apartado § 13, son negativos, por lo tanto también $A - g = g' + g''$, y más aún el primer factor, es negativo.

La ecuación para determinar los tiempos τ y τ' es:

$$0 = (A - g - 2 * (C / g)^{0,5} \dots \dots \dots (73)$$

y para determinar los tiempos τ , y τ' , lo siguiente:

$$0 = (A - g + 2 * (C / g)^{0,5} \dots \dots \dots (73^*)$$

Los puntos de la Tierra correspondientes a los tiempos anteriores, que denotaré por **O** y **O'**, se determinan suponiendo $\cos \eta = 1$, o $\eta = 0$, es decir, **p** por la fórmula (63):

$$(\tan (p - m)) / 2 = \tan (45^\circ + n / 2) * ((\tan m^\circ) / 2) \dots \dots (74)$$

y **u**, **v**, **w** calculadas por las fórmulas (35) de las cuales, sin embargo, **P'** desaparece; la determinación de los puntos **O**, y **O'**, correspondientes a los últimos tiempos requiere la suposición $\cos \eta = 1$, o $\eta = 180^\circ$, es decir, el cálculo de **p** por la fórmula:

$$(\tan (p - m)) / 2 = -\tan (45^\circ + n / 2) / ((\tan m^\circ) / 2) \dots \dots (74^*)$$

Segunda sección. Ejercicio 2

y así sucesivamente. Pues hasta τ y desde τ' en adelante, P'^2 tiene solo valores negativos, entre τ y τ' solo valores positivos, por lo que la parte de su expresión (72) no multiplicada en $\cos \eta$, a saber por $3g - A$, en las horas τ y τ' es negativo, (y) en las horas τ_1 y τ_1' es positivo, es decir en tal caso, la desaparición de P'^2 , respectivamente (da) un valor positivo y negativo de $\cos \eta$.

§ 21.

Explicaré las soluciones a las dos ecuaciones (73), y también aplicaré las reglas que conducen a la solución del ejercicio 2 al ejemplo tomado del eclipse solar del 15 de mayo de 1836. —Sustituyendo $d + f - a$ por A y $(f + d) / 2 + z$ por g en estas ecuaciones, se convierten en:

$$0 = -a + (f + d) / 2 - z \pm 2 * (C / ((f + d) / 2 + z))^{0,5}$$

o

$$\begin{aligned} a - (f + d) / 2 + 2 * (2 * C / (f + d))^{0,5} &= \\ &= -z + 2 * (2 * C / (f + d))^{0,5} - 2 * (2 * C / (f + d + 2 * z))^{0,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \dots a - (f + d) / 2 - 2 * (2 * C / (f + d))^{0,5} &= \\ &= -z - 2 * (2 * C / (f + d))^{0,5} + 2 * (2 * C / (f + d + 2 * z))^{0,5} \end{aligned}$$

o, si se considera la magnitud ligeramente diferente de 1:

$$\psi = (1 / (1 + 2 * z / (f + d))^{0,5}) * (2 / (1 + (2 * z / (f + d))^{0,5}))$$

se establece

$$\begin{aligned} a - (f + d) / 2 + 2 * (2 * C / (f + d))^{0,5} &= \\ &= -z * (1 - 2 * (2 * C / (f + d))^{0,5} * \psi / (f + d)) \end{aligned}$$

Segunda sección. Ejercicio 2

$$\begin{aligned} y \dots a - (f + d) / 2 - 2 * (2 * C / (f + d))^{0,5} = \\ = -z * (1 + 2 * (2 * C / (f + d))^{0,5} * \psi / (f + d)) \dots (75) \end{aligned}$$

La parte a la izquierda del signo igual de estas ecuaciones tiene la propiedad, ya utilizada para cantidades similares utilizadas anteriormente, de volverse completamente conocida cuando se conocen sus valores por cinco veces. Si, por lo tanto, uno calcula estos valores de hora en hora (lo que causa pocos problemas, ya que uno ya conoce a , $(f + d) / 2$, C), se puede reconocer su dependencia del tiempo a partir de las fórmulas de interpolación basadas en él; por lo tanto, tan pronto como se conozca el valor de la parte a la derecha del signo igual, se encontrarán las horas que satisfacen las ecuaciones.

Esta parte es una pequeña cantidad del orden de z , que varía muy lentamente. Una determinación aproximadamente correcta de cada uno de los tiempos hallados se puede basar en su descuido inicial, para lo cual se puede buscar entonces el valor de la parte despreciada y tomar como base una nueva solución de las ecuaciones, etc. Debido al tamaño pequeño y al cambio lento de z , estas aproximaciones convergen a la verdad (éxito) muy rápidamente.

Para reconocer la dependencia de la parte de las ecuaciones que queda del signo igual en el tiempo t , se aplican las fórmulas de interpolación dadas para el primero de los casos separados en el § 17, y se continúan hasta las 4tas diferencias, que siempre es suficiente, entonces las fórmulas:

1° tiempo intermedio

$$\begin{aligned} a + t * b + (t^2 - 1/4) / 2 * \\ * (\Delta_2 + \Delta_3 * (t - 3/2) / 3 + \Delta_4 * (t - 3/2) * (t - 5/2) / 12) \end{aligned}$$

Segunda sección. Ejercicio 2

2° tiempo intermedio

$$a + t * b + (t^2 - 1/4) / 2 * \\ * (c + t * d / 3 + \Delta_4 * (t^2 - 9/4) / 12)$$

3° y 4° tiempo intermedio

$$a + t * b + (t^2 - 1/4) / 2 * \\ * (c + t * d / 3 + e * (t^2 - 9/4) / 12)$$

5° tiempo intermedio

$$a + t * b + (t^2 - 1/4) / 2 * \\ * (c + t * d / 3 + \Delta_4 * (t^2 - 9/4) / 12)$$

6° tiempo intermedio

$$a + t * b + (t^2 - 1/4) / 2 * \\ * (\Delta_2 + \Delta_3 * (t + 3/2) / 3 + \Delta_4 * (t + 3/2) * (t + 5/2) / 12)$$

aplicando a través de todo

$$a + t * b + c' * (t^2 - 1/4) / 2$$

y si uno escribe ζ para la parte de las ecuaciones que depende de z , estas son

$$a + t * b + c' * (t^2 - 1/4) / 2 = \zeta$$

y resolviendo da:

$$t = -(b / c) \pm ((b^2 / c^2) - 2 * (a - \zeta) / c' + 1/4)^{0,5} \dots \dots \dots (76)$$

en la que, por lo tanto, se basa en la determinación por aproximaciones sucesivas.

Segunda sección. Ejercicio 2

La parte de la primera ecuación (75), a la izquierda del signo igual, tiene los siguientes valores para el eclipse solar elegido como ejemplo:

Hora 1° Merid, Paris	1° miembro ecua. (75)	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$
11h 15m 46s	+0,005902000					
12h 15m 46s	+1,268369000	1,26246700				
13h 15m 46s	+2,008354500	+0,73998550	-0,52248150			
14h 15m 46s	+2,225566000	+0,21721150	-0,52277400	-0,00029250		
15h 15m 46s	+1,919967000	-0,30559900	-0,52281050	-0,00003650	+0,00025600	
16h 15m 46s	+1,091775000	-0,82819200	-0,52259300	+0,00021750	+0,00025400	-0,00000200
15h 15m 46s	-0,258544000	-1,35031900	-0,52212700	+0,00046600	+0,00024850	-0,00000550

Los valores de la parte semejante de la segunda ecuación que no ennumero aquí, ya que no cambian de signo durante el transcurso del eclipse, también quedan fuera de los límites de ζ , y por lo tanto esta ecuación no tiene resoluciones reales, o contactos internos del cono de sombra lunar y no ocurrir en la Tierra durante este eclipse.

De acuerdo con los números que acabamos de mencionar, los dos contactos exteriores ocurren poco antes del primero y antes del último de las 7 horas, por lo que aquí se utilizarán las fórmulas de interpolación más útiles para el primero y el último tiempo intermedio anterior; a saber, las que presuponen los siguientes valores de **a**, **b**, **c'**:

$$a = +0,6371355, \quad b = +1,262467, \\ c' = -0,5224805 + (t - 3/2) * (-97,8 + 21,4 * (t - 5/2))$$

$$a = +0,4166155, \quad b = -1,350319, \\ c' = -0,522127 + (t + 3/2) * (155,3 + 20,7 * (t + 5/2))$$

Haciendo $\zeta = 0$ para obtener la primera aproximación, la fórmula (76) da

Segunda sección. Ejercicio 2

$$t = -0,5039 \text{ y } t = +0,3351$$

Para estos tiempos uno encuentra los valores de las cantidades requeridas para determinar z (§ 18):

$$\mu = -0,00076192 \text{ y } -0,00021977$$

$$v = +0,780222 \dots \dots +0,783164$$

$$\xi = -1,76934 \dots \dots -1,77069$$

por lo que, según la fórmula (64*), se obtiene:

$$z = -0,0009744 \dots \dots -0,0002804$$

y después según la (75):

$$\zeta = +0,0018345 \dots \dots +0,0005282$$

cuyos valores, suponiendo (reemplazando) en (76) sus resultados:

$$t = -0,502104 \text{ y } +0,334623$$

Si uno busca los valores de ζ para estos tiempos, los encuentra no muy diferentes de los utilizados, por lo que la solución de la ecuación aquí ya está finalizada. Expresado en minutos y segundos son por lo tanto

$$t = -30' 7,57'' \text{ y } = +20' 4,64''$$

y las horas del comienzo y fin (horas del primer meridiano de París) de la visibilidad del eclipse son:

$$\tau = 11^h 15' 38,43''$$

$$\tau' = 17^h 05' 50,64''$$

Segunda sección. Ejercicio 2

Los diferentes instantes del cálculo que conducen al conocimiento de los puntos **O** y **O'** son los siguientes. Al interpolar los valores dados en los apartados § 16 y § 18 se encuentra:

Variable	τ	τ'
b	-0,0360459	+0,5383942
c	-0,8820731	+0,7021905
$(f + d) / 2$	+0,0009782	+0,0009538
$a + (f + d) / 2 = \xi$	-1,7665921	-1,7699584

De esto y de los valores ya conocidos de:

Variable	τ	τ'
z	-0,0009744	-0,0002804

sus resultados (de aplicar la interpolación):

Variable	τ	τ'
$a + g = \xi + z$	-1,7675665	-1.7702388
$d - g = -(f - d) / 2 - z$	-0,0000038	-0,0006734
$f - g = (f - d) / 2 - z$	+0,0019526	+0,0012342

y según las fórmulas dadas en el § 18:

Variable	τ	τ'
R	0.027814394	0.537286094
R'	0.113118646	0.703744478
sin n * con m	5,7224601	6,7965898 n
sin n * sin m	7,0435662 n	6,9434204
m	272° 43' 59,16"	125° 29' 37,86"
n	0° 3' 48,31"	0° 3' 42,40"
m°	354° 56' 16,88"	287° 8' 44,15"
R°	0.884758411	0.885399352

La fórmula (74) da, a través de los valores de **m**, **n**, **m°** que se han dado a conocer

Variable	τ	τ'
p	267° 39' 55,84"	52° 34' 49,48"

Segunda sección. Ejercicio 2

Si también se basa el cálculo (según el apartado) (§ 4)

Variable	τ	τ'
x	-1,5630861	+1,2435868
y	-0,0634721	+0,9478652
l	+0,5643698	+0,5647130

así como los valores dados en el apartado § 16 de σ , δ , ε , ρ , δ' , así es como se obtiene

Variable	τ	τ'
$x - l * \sin p$	-0,9991847	+0,7950877
$y - l * \cos p$	-0,0404835	+0,6047188
θ'	+0,0045383	+0,0058694

y de las fórmulas (35), en las que P' desaparece, según:

Variable	τ	τ'
$(1 - \tan \lambda * \theta') * u$	+0,100087421	+0,795027956
$(1 - \tan \lambda * \theta') * v$	7,9466880	+0,494307386
$(1 - \tan \lambda * \theta') * w$	8,6009229 n	+0,571758856

el cual muestra:

Variable	τ	τ'
$\mu' - a + \omega$	270° 30' 25,92"	104° 16' 35,51"
$\tan \phi$	8,6012854 n	+0,696957988
$1 - \tan \lambda * \theta'$	+0,999961778	+0,999952107

La última fila de esta tabla permite un control del cálculo, ya que su valor también surge de las bien conocidas λ y θ' . Las expresiones de τ y τ' se derivan de las horas sidéreas dadas en el apartado § 4, que corresponden a las horas medias a los que pertenecen allí las declaraciones de los elementos del oscurecimiento (eclipsado)

Variable	τ	τ'
En Hora Sidérea	2 ^h 48' 27,630"	2 ^h 39' 37,368"
También μ'	42° 6' 54,45"	129° 54' 20,52"
a	52° 13' 30,77"	52° 27' 30,67"
$\mu' - a$	349° 53' 23,68"	77° 26' 49,85"

Segunda sección. Ejercicio 2

que desde $\mu' - a + \omega$ resta ω . Para obtener $\tan \phi$, uno tiene que ir a $\tan \phi$, la aritmética. Complemento sumado de $(1 - e^2)^{0,5} = 1,003336635$. De esta manera se encuentra la determinación de los puntos O y O' , a saber

Variable	τ	τ'
ω	280° 37' 2,24"	26° 49' 45,66"
ϕ	-2° 17' 38,95"	+34° 57' 52,05"

Se entiende que en O el contacto (entre los limbos de ambos astros) es visible al principio del eclipse y en la salida (del Sol) del punto de contacto, en cambio en O' al final y en la puesta (del Sol). Los puntos en el limbo del Sol donde se producen estos contactos son evidentes a partir de los valores de p ya dados.

§ 22.

En todo momento entre τ y τ_1 , y entre τ_1' y τ' , o, si τ_1 y τ_1' no están realmente presentes, entre τ y τ' , dos líneas rectas en la superficie del cono de sombra lunar tocan la superficie de la Tierra, o dos puntos de la Tierra ven el contacto de los limbos (contacto exterior de los limbos de los dos astros) en el horizonte. La determinación de estos puntos, o la resolución dada

Ejercicio 3.

Determinar en un tiempo dado el punto sobre la superficie de la Tierra donde se ve el contacto de los limbos de la Luna y del Sol en el horizonte

mediante su ejecución por un número suficiente de **instantes de tiempo entre los límites** ya conocidos según la solución del problema anterior, el cumplimiento del segundo requisito (propuesto y) realizado en el apartado § 5 de la **Teoría de los Eclipses**.

La condición a cumplir es que el contacto se vea en el horizonte.

Según el apartado § 6, la ecuación que corresponde (a ello es)

$$P' = 0$$

que, según la fórmula (60):

$$\cos \eta = (A - 3 * g) / ((3 * g - A)^2 - (g'' - g')^2)^{0,5}$$

y si la expresión (65) se sustituye por $(g'' - g')^2$, se obtiene

Segunda sección. Ejercicio 3

$$\cos \eta = (A - 3 * g) / ((3 * g - A)^2 + 4 * C / g - (A - g)^2)^{0,5} \dots (\text{¿76?})$$

Dado que el tiempo al que pertenecen A , C , g se encuentra entre los mismos límites entre los que g'' y g' son imaginarios, entonces $(g'' - g')^2$ es negativo y la parte de la cantidad bajo el signo de la raíz cuadrada sumada a $(3 * g - A)^2$ es positiva, entonces $\cos \eta$ no es menor que -1 ni mayor que 1 ; o, dentro de estos límites de tiempo, siempre hay dos valores de η que satisfacen la condición, a saber, el valor tomado tanto negativo como positivo, cuyo **coseno** tiene la expresión (76). En lugar de esta fórmula, también se puede utilizar la expresión de,

$$\tan \eta = \pm (4 * C / g - (g - A)^2)^{0,5} / (A - 3 * g) \dots \dots \dots (77)$$

que requiere que los dos valores de η se tomen dentro o fuera de los $\pm 90^\circ$, según tal que $A - 3 * g$ sea positivo o negativo; está libre del inconveniente que presenta la aplicación de las fórmulas (76) cuando η es muy pequeño, o muy cercano $a = 180^\circ$. Si, en lugar de A y g , uno quiere tener las cantidades en estas fórmulas, por las cuales ya se expresan fórmulas similares, entonces uno debe escribir $(f + d) / 2 + z$, $f + d - \xi - z$, $-\xi - 3 * z$ para g , escriba $A - g$, $A - 3 * g$. Conociendo η a partir de esto, p se puede encontrar mediante la fórmula (63).

Sin embargo, la introducción del ángulo η evidentemente no es esencial en la solución de este problema; también se puede determinar p directamente siguiendo la desaparición del primero de los dos factores (45) en su forma sin cambios, es decir, resolviendo la ecuación

$$0 = a + g + (b + R) * \cos p + (c + R') * \sin p$$

Segunda sección. Ejercicio 3

Esto evita la derivación de p de η (63); por otro lado, hay que buscar las cantidades auxiliares que sean necesarias para la solución de la última ecuación, por ejemplo

$$\begin{aligned}\tan K &= (c + R') / (b + R); k = (b + R) / \cos K = (c + R') / \sin K; \\ \cos L &= -(a + g) / k\end{aligned}$$

a través del cual

$$p = K - L \text{ y } = K + L$$

Además, conocer η facilita la solución del siguiente problema, siempre que se desee realizarlo y el actual (problema) para tiempos iguales dados. La reducción de η a p es en sí tan fácil, que incluso una pequeña ventaja obtenida por el primer ángulo compensa el problema que causa; pero la búsqueda de n , m , m° , cuyos ángulos se supone conocidos, requiere un poco más de cálculo, respecto del cual advierto que contribuirá no poco a facilitar la aplicación de casi todas las reglas contenidas en esta sección, si la pequeña variable z y algunas de las variables que cambian lentamente dependen de ella, por ejemplo $(f - d) / 2 + z$, $(f - d) / 2 - z$, ... inicialmente, se pueden calcular los tiempos tan cercanos entre sí que uno puede interpolarlos fácilmente.

Si p se ha hecho conocido de una forma u otra, entonces u , v , w se encuentran mediante las fórmulas (35), a partir de las cuales P' desaparece. A partir de la determinación de p , el cálculo a realizar es por tanto exactamente el mismo que llevó al conocimiento de los puntos O y O' en el apartado anterior (§ 21). Estos puntos, así como el O y el O' , si es que realmente existen, se encuentran evidentemente sobre la curva que une los puntos sobre la superficie terrestre a determinar por la solución del presente problema. Llamaré a esta curva, para poder describirla brevemente, la **curva-**

O. Que consta de dos partes separadas cuando τ_1 y τ_1' están realmente presentes, pero bastante contiguas (valores juntos) cuando el cono de sombra lunar no penetra del todo en la Tierra, (como) ya lo he señalado.

El hecho de que alguno de los puntos de la **curva-O** vea el principio o el final del eclipse está determinado por el valor negativo o positivo de la expresión (71), que actualmente se convierte en condición

$$s * (\alpha + b * \cos p + c * \sin p + (\alpha' + b' * \cos p + c' * \sin p) * \theta')$$

..... (78)

El hecho de que se vea el contacto (entre los limbos) en la salida o en la puesta del punto de contacto está determinado por el tamaño del ángulo horario de ese punto = $\mu' - a' + \omega$ (§ 6), que es $> 180^\circ$ en el primer caso, y $< 180^\circ$ en el segundo. La condición de salida o puesta es, por lo tanto, el valor negativo o positivo de $\sin(\mu' - a' + \omega)$; cuya condición, sin embargo, debe desarrollarse aún más para que se vuelva independiente del gradiente de línea recta a' del punto de contacto de los limbos, que no se aplica más en la presente investigación. Ya tengo las fórmulas en el apartado § 6:

$$\begin{aligned} \cos d' * \sin(a' - a) &= \alpha * \cos f \\ \cos d' * \cos(a' - a) &= \beta * \cos f \end{aligned}$$

enumeradas, que, con las dos primeras de las fórmulas (21), a saber:

$$\begin{aligned} m'' * u &= m'' * \cos \phi_1 * \sin(\mu' - a' + \omega) = m'' * a - m' * \alpha + \alpha * P \\ m'' * v &= m'' * \cos \phi_1 * \cos(\mu' - a' + \omega) = m'' * b - m' * \beta + \beta * P \end{aligned}$$

asociándolas resultan,

Segunda sección. Ejercicio 3

$$m'' * \cos d' * \cos \phi_1 * \sin (\mu' - a' + \omega) = m'' * \cos f * (\beta * a - \alpha * b)$$

y por lo tanto, como $\cos d'$, $\cos \phi_1$, $\cos f$ son siempre positivos, muestra que $\sin (\mu' - a' + \omega)$ y $\beta * a - \alpha * b$ tienen el mismo signo. Según la fórmula (19), esta última cantidad es:

$$= (x - l * \sin p) * \cos d + (y * \sin p - x * \cos p) * i * \sin d$$

y continua que el contacto de los limbos se ve en la salida o en la puesta del punto de contacto, siendo negativo o positivo, según el caso.

$$x - l * \sin p + (y * \sin p - x * \cos p) * i * \tan d \dots \dots (79)$$

Obviamente, el signo de esta expresión puede ser diferente del signo de $x - l * \sin p (= u)$ sólo si él mismo es muy pequeño.

§ 23.

Al igual que los apartados dados anteriormente, seguiré el presente método (orden) con un ejemplo. Para esto elijo la **3° hora**, para la cual utilizo los elementos del eclipse, etc. que ya he descrito, a saber, **13h 14' 46"** hora en el 1° meridiano de París. Para este tiempo, se encuentra detallado en el apartado § 18:

Variable	13h 15m 46s
μ	-0,00008533
ν	+0,1410999
ξ	+0,2381640
uno obtiene z	-0,0006054

También (descrito) en el apartado § 16:

Variable	13h 15m 46s
b	+0,161538
c	-0,339126

Segunda sección. Ejercicio 3

$(f - d) / 2$	+0,00095365
---------------	-------------

de donde, combinado con **z**, se puede encontrar de acuerdo con las fórmulas § 18

Variable	13h 15m 46s
R	+0,161793846
R'	+0,295351581
sin n * con m	5,7224601
sin n * sin m	7,0435662 n
m	244° 54' 40,91"
n	0° 8' 43,94"
m°	50° 37' 47,44"
R°	+0,375250345

El cálculo directo del denominador de la fórmula (76), que es $= 2 * R°$, $R°$ es sólo 6 unidades del último decimal menor, diferencia que se puede atribuir a la limitación de las especificaciones de **b** y **c** a 6 decimales. Fuera de

Variable	13h 15m 46s
$3 * g - A = \xi + 3 * z$	+0,236347800
$2 * R°$	+0,750500697
resulta η	$\pm 108° 21' 21,58''$

(76)

y la formula (63) arroja los valores asociados a estos dos valores

Variable	τ	τ'
p	187° 3' 43,47"	43° 56' 57,61"

de donde, se puede encontrar, dando **x**, **y**, **l** (de § 4) y σ , δ , ε , ρ , δ' (de § 16)

Variable	τ	τ'
$x - l * \sin p$	-0,531256900	-0,992486900
$y - l * \cos p$	+0,844692000	-0,122049100
θ'	-0,001961400	-0,003842100
$(1 - \tan \lambda * \theta') * u$	+0,188229462	+0,100755068
$(1 - \tan \lambda * \theta') * v$	+0,366968427	+0,043271096
$(1 - \tan \lambda * \theta') * w$	+0,802204142	+0,872927952
$\mu' - a + \omega$	242° 50' 43,13"	272° 29' 47,01"

Segunda sección. Ejercicio 3

Tan ϕ	+0,128254000	+0,867208847
$(1 - \tan \lambda * \theta')$	+0,000007300	+0,000013700

En el apartado §4 se encuentra $\mu' = (4^h 48' 54,933'') * 15 = 72^\circ 13' 44,00''$ y $a = 52^\circ 18' 18,82''$, entonces $\mu' - a = 19^\circ 55' 25,18''$. Así que por fin se tienen los dos puntos deseados de la **curva-O**:

Variable	τ	τ'
ω	222° 55' 17,95"	252° 34' 21,83"
ϕ	+53° 25' 52,57"	-6° 35' 48,63"

desde qué puntos, según el apartado § 19, (donde) en el primero se ve el principio, (y en) el segundo el fin del eclipse; en ambos (casos) se ve el contacto de los limbos en el orto (salida y en la puesta ¿del Sol) del punto de contacto (§ 22).

§ 24.

Queda por cumplir la tercera de las exigencias planteadas en el **análisis de los eclipses** en el apartado § 5, a saber, determinar la línea curva sobre la superficie de la Tierra en la que el limbo que toca es el máximo del eclipse. Los puntos de esta curva se determinan resolviendo el (siguiente ejercicio 4).

Ejercicio 4.

Determinar los puntos sobre la Tierra donde, en un instante dado, se verá el contacto circular (del Sol y de la Luna) como el máximo del eclipse.

Esta tarea requiere el cumplimiento de dos condiciones, a saber que los limbos se toquen en un instante dado y que no se separen en el siguiente. La primera de estas condiciones viene expresada por las ecuaciones (2), y los puntos sobre la Tierra correspondientes a éstas vienen dados, mediante las fórmulas (29), por una cantidad ζ' determinada que viene dada por la ecuación (30):

$$(s + \zeta')^2 = (a * s + \alpha' * \zeta')^2 + (b * s + \beta' * \zeta')^2 + (c * s + \gamma' * \zeta')^2$$

La segunda condición requiere que la expresión (71) desaparezca, es decir, que se satisfaga la ecuación. La incógnita ζ' de la primera ecuación y $P' - \theta'$ de la segunda relacionadas entre sí están dadas por

$$\zeta' = s * (P' - \theta') / (\sigma^2 - 1)^{0,5}$$

Se obtiene una condición, ambas condiciones al mismo tiempo, o si se prefiere, la condición de que los limbos que se tocan no se

Segunda sección. Ejercicio 4

separen en el instante siguiente, expresando la ecuación, si se elimina $P' - \theta'$ entre estas dos ecuaciones; a saber

$$(W' + V / (\sigma^2 - 1)^{0,5})^2 = (a * W' + \alpha' * V / (\sigma^2 - 1)^{0,5})^2 + \\ + (b * W' + \beta' * V / (\sigma^2 - 1)^{0,5})^2 + (c * W' + \gamma' * V / (\sigma^2 - 1)^{0,5})^2 \\ \dots\dots\dots (80)$$

La solución de esta ecuación debe arrojar los valores de p , que determinan los puntos de la Tierra donde el contacto de los limbos es el **máximo del eclipse** en el momento dado.

Dado que a, b, c, V, W' contienen la primera dimensión de $\cos p$ y $\sin p$, esta ecuación contiene el 4° o es del 8° grado. Por otro lado, no más de cuatro círculos paralelos de la Tierra pueden tocar el cono de sombra lunar (en movimiento) al mismo tiempo, a saber, dos en el lado de la Tierra que mira hacia las estrellas y dos en el lado de la Tierra que es opuesto a ellas.

Dado que de esta manera sólo quedan claras 4 resoluciones del problema, quizás no parezca superflua la observación de que son matemáticamente posibles los casos del problema en los que realmente debe tener 8 resoluciones reales. El más simple de estos casos es aquel en que, en lugar del cono, se supone un **cilindro** cuyo eje está en el plano del **ecuador**, y que, sin movimiento propio, se vuelve tan libre que está más de la mitad rodeado por la Tierra.

Entonces dos paralelos de la Tierra tocan los puntos más al **Norte** y más al **Sur** de la línea de intersección de las superficies del cilindro y de la Tierra, y para los cuatro puntos de contacto la tangencia de los limbos es el **máximo del eclipse**. Además, dos paralelos de la Tierra tocan los dos puntos de la curva cortada que se aproximan más entre sí, y estos puntos ven el contacto fronterizo como el mínimo del eclipse, es decir, no como resultado del acercamiento, sino de la

Segunda sección. Ejercicio 4

distancia de los centros de los dos astros. Dado que ambas son válidas tanto para una figura esférica, como para una figura esférica de la Tierra, se justifican 6 soluciones, incluso en el primer caso. Aunque la tarea puede tener 8 resoluciones solo en el segundo caso.

Estos son realmente evidentes cuando se supone que el radio del cilindro es mayor que el radio de curvatura de los meridianos debajo del **ecuador**, pero menor que la mitad del eje de la Tierra, y se coloca de manera que biseca la superficie de la Tierra, dos veces a cada lado del **ecuador**, mientras esté debajo del **ecuador** debajo (de la superficie) de la Tierra; luego cuatro círculos paralelos tocan la superficie del cilindro en lugar de los dos últimos encontrados, y los cuatro puntos donde se producen estos contactos ven el contacto de los limbos de los astros como el mínimo del eclipse.

De las 8 soluciones del problema, que en este caso parecen reales, algunas pueden ser imaginarias en otros casos, pero ninguna puede faltar en la ecuación que resuelve el problema. Los eclipses nunca muestran el contacto de los limbos como mínimo, debido al movimiento del cono de sombra lunar, que es mayor que el movimiento diurno de los puntos sobre la Tierra. Observo de lo anterior que la ecuación (80) realmente se reduce al **6° grado**; si se supone que la excentricidad de los meridianos terrestres se elimina.

La ecuación (80) da la determinación de todos los puntos de la Tierra donde un paralelo está, en un momento dado, en contacto con la superficie del cono de sombra lunar en movimiento. Pero no hay interés en conocer aquellos puntos por debajo de cuyos horizontes se produce entonces el contacto entre los limbos de los astros. Se excluyen si la ecuación está restringida de manera tal que sólo establece valores positivos de P' , o si, en su lugar, se usa la ecuación:

$$0 = V - W' * (P' - \theta')$$

o según la expresión (71):

$$0 = \alpha + b * \cos p + c * \sin p - (\alpha' + b' * \cos p + c' * \sin p) * (P' - \theta')$$

..... (81)

en el que P' sólo se toma positivamente. Esta ecuación irracional también es más conveniente de manejar que la racional anterior; que, al ser del 8º grado, tampoco puede resolverse directamente. Los θ' y P' que aparecen allí son (35):

$$\theta' = (x - l * \sin p) * \sin \varepsilon / \cos \lambda + \rho * (y - l * \cos p) * \cos \varepsilon * \sin (\delta - \delta') / \cos \lambda - \tan \lambda$$

$$P' = (1 - (x - l * \sin p)^2 - \rho^2 * (y - l * \cos p)^2 + \theta'^2)^{0,5}$$

§ 25.

El cono de sombra de la Luna, cualquiera que sea (la posición) lejana de este astro en que se origine, nunca es tan extenso para que en su encuentro con la Tierra pueda traspasar completamente su interior (?). En todos los eclipses, causados por la Luna, hay al menos una línea curva sobre la superficie de la Tierra, por un lado (lugar) desde el cual no se ve el eclipse, en cuyos puntos, por lo tanto, se ve el limbo de contacto (directriz del cono de sombra) como el máximo del eclipse; si el cono de sombra lunar penetra completamente sobre la Tierra, se presenta una segunda línea de este tipo y el eclipse no se percibe fuera del área de la superficie terrestre delimitado por esta y por la **curva-O**.

Para poder describirla brevemente, llamaré a esta segunda línea curva, cuyos puntos se determinarán resolviendo el **ejercicio 4**, la **Curva-M**, y bajo este nombre nombraré a toda la curva, que puede

tener una línea continua, o consta de dos partes separadas. —Por otro lado, en el caso de los **tránsitos de los planetas interiores (Mercurio y Venus) a través del Sol**, donde la Tierra se “alinea” con ellos, el “**cono de sombra**” es mucho más extenso que la (órbita de la) Tierra, de modo que este último sólo corta una pequeña parte de su superficie, y por lo tanto la **curva-M**, solo si este corte ocurriera en el limbo y fuera incompleto, podría realmente penetrar la (superficie de la) Tierra. Dado que este caso probablemente nunca ocurrirá, la **curva-M** generalmente solo está realmente presente en el caso de los eclipses causados por la Luna, por lo que la solución al problema actual solo se puede considerar con este tipo de eclipse.

Mientras que en una parte de la **curva-O** el principio del eclipse se ve en una parte (de la Tierra) y el final del eclipse en otra, necesariamente debe tener, si es bastante continuo, dos puntos donde el principio y el final coinciden (¿contactos interiores?), o el contacto entre los limbos sea el máximo del eclipse; si consta de dos partes separadas, cada una de ellas debe tener dos (pares) de tales puntos. Estos puntos son obviamente también puntos de la **curva-M**, es decir, aquellos que determinan su principio y fin. **En un par** de estos puntos, que designaré por O_2 y O'_2 , el contacto entre los limbos (de la Luna con el Sol) es el primero (O_2) y el máximo del eclipse el siguiente (O'_2), a saber, en dos instantes a los que les asignaré las letras τ_2 y τ'_2 ; **en el otro par** (O_3 y O'_3), cuando el cono de sombra lunar penetra por completo sobre la Tierra, el contacto de los limbos en la parte opuesta del Sol es el primero (O_3) y el último (O'_3) como el máximo del eclipse, en los instantes τ_3 y τ'_3 . Obviamente, τ_2 y τ'_2 , así como τ_3 y τ'_3 se encuentran dentro de τ y τ' y fuera de τ_1 y τ'_1 . En cada instante entre τ_2 y τ'_2 existe una solución a la ecuación (81); en cada instante entre τ_3 y τ'_3 una segunda (solución). Realmente no pueden existir más resoluciones, dado que no ocurren las cuatro (resoluciones) para las cuales se tocan los limbos (donde) sería el mínimo de eclipse, y las dos (resoluciones),

Segunda sección. Ejercicio 4

que dan los puntos de la Tierra debajo de cuyos horizontes se tocan los limbos, (soluciones que) no están incluidas en la ecuación (81).

Para resolver esta ecuación la pondré de la forma:

$$0 = ((\alpha' + \lambda' * \sin(p - L')) / (\alpha + \lambda * \sin(p - L))) * (P' - \theta') \dots \dots \dots (82)$$

y aplicarla, en donde λ, L, λ', L' tienen el siguiente significado:

$$\begin{aligned} \lambda * \sin L &= -b & \lambda' * \sin L' &= -b' \\ \lambda * \cos L &= c & \lambda' * \cos L' &= c' \end{aligned}$$

Primero supondré que se conoce una aproximación de p , y denotaré por x el valor que alcanza la expresión (82) a través de su aplicación. Despreciando el cuadrado y las potencias superiores, la corrección necesaria del valor $\delta * p$, viene dada por la ecuación:

$$\begin{aligned} \text{Aux1} &= ((\lambda' * \cos(p - L')) / (\alpha' + \lambda' * \sin(p - L'))) - \\ &- (\lambda * \cos(p - L)) / (\alpha + \lambda * \sin(p - L)) + \\ &+ (dP' - d\theta') / (dp * (P' - \theta')) \end{aligned}$$

[N.d.T. al español:] Aux1 para la no repitencia.

$$0 = x + \text{Aux1} * \mu * \delta * p$$

determina que μ significa el módulo del sistema logarítmico de Brigg. Si $\delta * p$ se va a expresar en segundos, μ se debe multiplicar por 1" de arco, o puede ser tomado (como):

$$\delta * p = -x * 474942,3'' / \text{Aux1} \dots \dots \dots (83)$$

La búsqueda de los valores de x y los valores de P' y dP' / dp requeridos para el denominador de la fórmula (83) pueden hacerse

Segunda sección. Ejercicio 4

dependientes de **p** o **h**. El primero requiere la aplicación de las fórmulas (35) a menudo citadas, incluso al final del apartado anterior, y diferenciándolas una (con la otra) se obtiene

$$\begin{aligned}
 d\theta' / dp &= -l * \sin \varepsilon * \cos p / \cos \lambda + \\
 &\quad + l * \rho * \cos \varepsilon * \sin (\delta - \delta') * \sin p / \cos \lambda \\
 (dP' - d\theta') / (dp * (P' - \theta')) &= ((x - l * \sin p) * l * \cos p - \\
 &\quad - \rho^2 * (y - l * \cos p)) / (P' * (P' - \theta')) - d\theta' / (P' * dp) \\
 &\quad \dots \dots \dots (84)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, la expresión de **P'** dependiente de **η** es:

$$P' = N * \cos n * (3 * g - A + 2 * R^\circ * \cos \eta)^{0,5}$$

o para abreviar se escribe

$$N = \cos n / (1 - \sin n * \cos (\eta + m^\circ))$$

Su cociente diferencial es

$$\begin{aligned}
 dP' / dp &= -N * (d\eta / dp) * (N * \cos n^2 * R^\circ * \sin \eta / P' + \\
 &\quad + \tan n * \sin(\eta + m^\circ))
 \end{aligned}$$

o de ésta

$$dp = N * d * \eta$$

(queda) es,

$$dP' / dp = -N * (\cos n)^2 * R^\circ * \sin \eta / P' - \tan n * \sin (\eta + m^\circ)$$

Segunda sección. Ejercicio 4

Cuando se utiliza esta forma de calcular P' y su derivada, no se utilizan los valores de $x - I \sin p$ e $y - I \cos p$, por lo que también es ventajoso utilizarlos en el cálculo de θ' y evitar $d\theta' / dp$. Esto sucede cuando θ' está en la forma (42), (entonces) se escribe:

$$\theta' = q - \rho * I * \cos \varepsilon * \sin (\delta - \delta') * \cos p / \cos \lambda - \\ - I * \sin \varepsilon * \sin p / \sin \lambda$$

y en ésta introduciendo λ'' y L'' :

$$\lambda'' * \sin L'' = - \rho * I * \cos \varepsilon * \sin (\delta - \delta') / \cos \lambda$$

$$\lambda'' * \cos L'' = I * \cos \varepsilon / \cos \lambda$$

se juntan en

$$\theta' = q - \lambda'' * \sin (p - L'')$$

donde q es la cantidad ya utilizada en la fórmula (42), cuyos valores se pueden encontrar en el apartado § 16. Entonces, si se elige esta forma de cálculo y se comienza con un valor dado de p , se debe encontrar:

$$(\tan (\eta + m^\circ)) / 2 = (\tan (p - m)) / 2) / \tan (45^\circ + n / 2)$$

$$P' = N * \cos n * (3 * g - A + 2 * R^\circ * \cos \eta)^{0,5}$$

$$\theta' = q - \lambda'' * \sin (p - L'')$$

$$(dP' - d\theta') / dp = -N * (\cos n)^2 * R^\circ * \sin \eta / P' - \\ - \tan (n) * P' * \sin (\eta + m^\circ) + \lambda'' * \cos (p - L'') \\ \dots \dots \dots (85)$$

La cantidad **N** también puede ser calculada utilizando la fórmula

$$\begin{aligned} & \tan (45^\circ + n / 2) * ((\cos (p - m)^2) / 2) / ((\cos (\eta + m^\circ)^2) / 2) = \\ & = ((\sin (p - m)^2) / 2) / (((\sin (\eta + m^\circ)^2) / 2) * \tan (45^\circ + n / 2)) \end{aligned}$$

Sin embargo, difiere sólo en el orden de **n** igual a **1**, y fácilmente se nota que llegar a un (resultado) verdadero (según) la fórmula (83) se ve un poco disminuido al despreciar pequeñas cantidades en su denominador: si $\delta * p$ todavía tiene un valor más considerable, el error que surja del descuido de $\delta * p^2$, etc., se cuenta en el mismo orden que el generado por esos descuidos; pero si $\delta * p$ ya se ha vuelto muy pequeño, un pequeño error en el denominador (según) la fórmula (83) tendrá muy poca influencia en su valor. —Si ya se han encontrado **z**, **m**, **n**, **m°**, **3 * g - A**, **R°** para el tiempo en el que se quiere aplicar el presente (cálculo de fórmulas (84)), que es el caso cuando se describe la **curva-O** para el mismo instante, la aplicación de las fórmulas (85) es quizás algo más ventajosa que la aplicación de (84).

Todavía tengo que demostrar cómo se llega al valor aproximado asumido de **p** como se indicó anteriormente. Según el apartado § 19, **a** es siempre de una magnitud menor del orden de **i**, y **a'** es de una magnitud mucho menor del orden de **i / s**. **θ'** es también de una magnitud menor; **η** es aproximadamente = **p - m - m°**. La ecuación (82) es, por lo tanto, aproximadamente:

$$\begin{aligned} 0 = & (\lambda' / \lambda) + (\sin (p - L') / \sin (p - L)) + \\ & + (3 * g - A + 2 * R^\circ * \cos (p - m - m^\circ)) / 2 \dots (82*) \end{aligned}$$

y a partir de esto debe hallarse **p**, mediante experimentos fáciles de realizar, con la aproximación supuesta. También se pueden establecer los límites de **p** entre los cuales se deben realizar estas pruebas.

Dado que la parte irracional de la ecuación

$$1 = (\lambda' * \sin (p - L')) / (\lambda * \sin (p - L)) * \\ * (3 * g - A + 2 * R^{\circ} * \cos (p - m - m^{\circ}))$$

no puede ser **menor que 0** ni **mayor que 1**, y para el primero de estos valores $\sin (p - L) = 0$, además $p = L$ o $= 180^{\circ} + L$; para el otro

$$\lambda * \sin (p - L) = \lambda' * \sin (p - L')$$

también

$$\tan (p - (L + L') / 2) = ((\lambda + \lambda') / (\lambda - \lambda')) * (\tan (L - L')) / 2$$

y si la cantidad a la derecha del signo igual se pone $= \tan \phi$, $p = (L + L') / 2 + \phi$ o $180^{\circ} + (L + L') / 2 + \phi$, entonces p se encuentra entre L y $(L + L') / 2 + \phi$ o entre $180^{\circ} + L$ y $180^{\circ} + (L + L') / 2 + \phi$; y se ha de buscar cuanto más cerca del primer o segundo límite, menor o mayor sea la parte irracional de la ecuación. El tamaño de esta parte generalmente estará confinado, por la limitación de p que acabamos de dar, a límites tan poco distantes, que incluso el valor de p , con el que se hace el primer intento, será casi verdadero por estimación; respecto a esto observo que un valor dado de la parte irracional $= r$, conduce al conocimiento de p por la última fórmula mencionada, si en la misma se escribe $\lambda' * r$ en lugar de λ' . Por cierto, el verdadero valor de p obviamente puede exceder un poco los límites dados anteriormente, porque no se han derivado de la ecuación estrictamente correcta.

§ 26.

Segunda sección. Ejercicio 4

El modo de aplicación de los preceptos que propongo y que acabamos de dar, es el siguiente. Primero, para el tiempo para el cual se va a determinar un punto de la **curva-M**, a partir de la tabla (al final) del apartado § 19 tomamos:

$$a, b, c, a', b', c',$$

y por lo tanto hallamos λ, L, λ', L' ; también desde la información del apartado § 16

$$q, k = \cos \varepsilon * \sin (\delta - \delta') / \cos \lambda, h = \sin \varepsilon / \cos \lambda$$

con lo cual se determinan X'', L'' . Los valores de $m, n, m^\circ, 3 * g - A$ ya se conocen cuando se buscan los puntos de la **curva-M** para los instantes en el tiempo para los que ya se han determinado los puntos de la **curva-O**. Después de estos preparativos, si ya no se puede derivar una primera aproximación al valor de p a partir de la determinación previa de puntos de la **curva-M** para tiempos ligeramente diferentes, se busca lo mismo a través de la ecuación (82*). Esta aproximación se utiliza como base para la primera aplicación de la ecuación (82), donde son suficientes cinco decimales en los cálculos; tan pronto como se ha encontrado x , se calcula el denominador de la fórmula (83), cuya expresión, sin embargo, despreciando a, a' y otras cantidades pequeñas, se puede encontrar en, reduciendo

$$\sin (L' - L) / (\sin (p - L) * \sin (p - L')) - R^\circ * \sin \eta / (P' * (P' - \theta'))$$

..... (83*)

encontrando $\delta * p$. La primera aproximación, así mejorada, constituye la base de la segunda aplicación de la ecuación (82), que, sin embargo, debe realizarse con toda la precisión en la que se pretende alcanzar en el resultado. El nuevo valor de $\delta * p$ resultante

Segunda sección. Ejercicio 4

de esto no requerirá de ninguna mejora adicional, y el punto buscado ahora de la **curva-M** se determinará de acuerdo con las fórmulas (35), en las que $P' - \theta'$, a través de la expresión indiferente de

$$(\alpha + \lambda * \sin (p - L)) / (\alpha' + \lambda' * \sin (p - L'))$$

pueden ser reemplazados.

Para dar un ejemplo de esto, determinaré el punto de la **curva-M** en el que se ve el contacto del limbo al mismo tiempo que busqué, en el § 23, los puntos de la **curva-O**. Los elementos en los que se fundamenta esta disposición son:

α	+0,0006020	b	+0,2246005	c	+0,5056610 § 19
α'	-0,0000050	b'	-0,0020020	c'	+0,2434060 § 19
q	-0,0039824	k	+0,0043816	h	-0,0049168 § 16

y las ya aplicadas en el apartado § 23:

$3 * g - A$	+0,236347800
$2 * R^\circ$	+0,750500697
m	244° 54' 40,91"
n	0° 8' 43,94"
m°	50° 37' 47,44"

De la primera se obtiene:

L	336° 3' 1,95"	λ	+0,553297872
L'	0° 28' 16,48	λ'	+0,243414250
L''	222° 47' 26,27	λ''	+0,003723021

La aproximación no tan precisa al valor de p derivado de la ecuación (82*) es = **320° 15'**. Corresponden a ella

η	24° 34,0'
N	+1,000644932

Segunda sección. Ejercicio 4

P'	+0,95922
θ'	-0,00767

$(\alpha' + \lambda' * \sin(p - L'))$	+0.157188221
$(\alpha + \lambda * \sin(p - L))$	+1,500582924
$(P' - \theta')$	+0.966896526
x	+0,005540000

La fórmula (83*) da el denominador de la expresión de $\delta * p = 2,1832$, con lo cual $\delta * p$ mismo se encuentra (como) $= -20' 5''$. Por lo tanto, he basado la segunda aproximación en $p = 319^\circ 54' 55''$, y partiendo de que, por un cálculo similar, pero con 7 decimales en el cálculo, se obtiene:

η	24° 34' 0,72"
N	+1,000660600
P'	+0,9601696
θ'	-0,0076680

además

$(\alpha' + \lambda' * \sin(p - L'))$	+0.631829356
$(\alpha + \lambda * \sin(p - L))$	+6.529000472
$(P' - \theta')$	+0.967837622
x	+0,0000494

El denominador de la fórmula (83), totalmente calculado, es $= 2,1329$, lo que da $\delta * p = -11,00$, es decir, el valor de $p = 319^\circ 54' 44,00''$ que satisface la ecuación (82). Si la solución de la ecuación está concluida, si se basara una tercera aproximación para este valor de p , no se encontraría ninguna mejora adicional.

Para encontrar el punto deseado de la **curva-M** a partir del valor ahora conocido de p , uno tiene

$$(P' - \theta') = (\alpha + \lambda * \sin(p - L)) / (\alpha' + \lambda' * \sin(p - L')) = 0,967837622$$

Segunda sección. Ejercicio 4

además, mediante los valores de x , y , l , σ , δ , etc. ya utilizados en el apartado § 23:

a	-0,2371101	$\sin \varepsilon / \cos \lambda$	+0,002033833
b	+0,0479124	$\cos \varepsilon * \cos \delta / \cos \lambda$	+0,944706710
c	-0,1399814	$\cos \varepsilon * \sin \delta / \cos \lambda$	+0,327982597

por lo que, según las fórmulas (35), se conoce:

$1 + \tan \lambda * (P' - \theta')$ * u	+0,413447338
$1 + \tan \lambda * (P' - \theta')$ * v	+0,962242866
$1 + \tan \lambda * (P' - \theta')$ * w	+0,177455188
$\mu' - a + \omega$	345° 53' 25,71"
$\tan \phi$	+0,178854676
$1 + \tan \lambda * (P' - \theta')$	+1,007873439

y como $\mu' - a = 19^\circ 55' 25,18''$, $\tan \phi \geq \tan \phi_1 + 0,00144667$

ω	325° 58' 0,53"
ϕ	+10° 10' 24,70"

§ 27.

Para completar la resolución del **ejercicio 4**, todavía es necesario que se determinen los plazos entre los cuales haya una resolución, o dos resoluciones estén presentes. Estos límites son los instantes denotados en el apartado § 25 por τ_2 y τ'_2 y por τ_3 y τ'_3 , los instantes en que los puntos sobre la Tierra, denotados por O_2 y O'_2 y por O_3 y O'_3 , comunes a la **curva-O** y a la **curva-M**, se observan el contacto de los limbos; cuyos puntos, según lo anterior, están dados para esos instantes.

Cuando la resolución del **ejercicio 3** se ha llevado a cabo para un momento arbitrario en el tiempo, entonces, los dos valores de p que le corresponden crecen, por lo que se pueden encontrar los valores de la expresión (78).

Segunda sección. Ejercicio 4

Si uno realmente calcula esto para varios instantes en el tiempo, entonces se conocen los límites entre los cuales se encuentran las horas que se buscan actualmente; a saber, aquellas entre estos instantes entre los cuales los valores de (la fórmula) (78) cambian de signo. Si estos instantes son lo suficientemente cercanos como para que se pueda basar una fórmula de interpolación para los valores de (78) en los que preceden y siguen a un cambio de signo, entonces haciéndolos = 0 se llega a una ecuación que da el tiempo de desaparición (finalización), entonces una de las veces que lo estamos buscando, seguro (se da).

De esta forma, siguiendo el cálculo anterior de numerosos puntos de la **curva-O**, se puede, con poco esfuerzo, obtener conocimiento de τ_2 y τ'_2 , y (si existen) también de τ_3 y τ'_3 .

Además, en el presente trabajo he tenido la intención de buscar métodos (más) directos para el análisis de los eclipses, por lo que también desarrollaré la ecuación resolviendo qué (instante) τ_2 , τ'_2 , τ_3 , τ'_3 directamente se puede encontrar.

Las condiciones que conducen a la determinación de estas horas son que los puntos correspondientes a ellas, O_2 , O'_2 , O_3 y O'_3 estén en la **curva-O** y en la **curva-M** al mismo tiempo. La primera (condición) exige que (§ 22)

$$0 = P',$$

y la otra (condición) (§ 24) de cuya ecuación surge

$$0 = V - W' * (P' - \theta')$$

Segunda sección. Ejercicio 4

ya que se ha de cumplir al mismo tiempo que la anterior, reduciéndose a

$$0 = V + W' * \theta'$$

Este ángulo debe ser eliminado de estas dos ecuaciones, las cuales están en relación con **p** de **4° grado**, para que quede una ecuación que contiene la hora como la única cantidad desconocida.

Esta eliminación pierde su dificultad por la misma transformación de la primera ecuación de la que he hecho depender en este tratado la solución directa de los problemas restantes del análisis de los eclipses.

Debido a que esta ecuación se ha convertido en

$$0 = 2 * g - g' - g'' + 2 * (g - g' * g - g'')^{0,5} * \cos \eta$$

entonces las expresiones:

$$\begin{aligned} \cos \eta &= (g'' + g' - 2 * g) / (2 * (g - g' * g - g'')^{0,5}) \\ \sin \eta &= \pm(g'' - g') * (-1)^{0,5} / (2 * (g - g' * g - g'')^{0,5}) \end{aligned}$$

dan esos resultados; la segunda, o, cuando se divide por **W**,

$$\begin{aligned} 0 = & (\alpha + \beta' * \cos p + \epsilon' * \sin p) / (\alpha' + \beta' * \cos p + \epsilon' * \sin p) + \\ & + \gamma - \rho * l * k * \cos p - l * h * \sin p \dots \dots \dots (86) \end{aligned}$$

pero reemplazando las expresiones de **cos p** y **sen p** dadas en el apartado § 15 por **cos η** y **sen η**, la forma

$$\begin{aligned} 0 = & (\alpha + \beta' * \cos \eta + \alpha'' * \sin \eta) / (\beta + \beta' * \cos \eta + \beta'' * \sin \eta) + \\ & + (\gamma + \gamma' * \cos \eta + \gamma'' * \sin \eta) / (\mu - \mu' * \cos \eta - \mu'' * \sin \eta) \end{aligned}$$

Segunda sección. Ejercicio 4

asume que α , β , γ , μ , etc. son independientes de η , entonces la ecuación por la cual se determinan los tiempos buscados se convierte en:

$$0 = (\alpha * G + \alpha' * G' \pm \alpha'' * G'') / (\beta * G + \beta' * G' \pm \beta'' * G'') + \\ + (\gamma * G + \gamma' * G' \pm \gamma'' * G'') / (\mu * G - \mu' * G' \pm \mu'' * G'') \\ \dots \dots \dots (87)$$

donde G , G' , G'' , para abreviar, escritos como por

$$2 * (g - g' * g - g'')^{0,5}, g'' + g' - 2 * g, (g'' - g') * (-1)^{0,5}$$

o por

$$3 * (g * (2 * g - A) + C / g)^{0,5}, A - 3 * g, (4 * C / g - (A - g)^2)^{0,5}$$

Estas cantidades son reales si la ecuación cúbica (47) tiene dos raíces imaginarias, es decir, durante los intervalos entre τ y τ_1 , y entre τ_1' y τ' , o, si τ_1 y τ_1' no están realmente presentes, entre τ y τ' ocurre que los tiempos intermedios no son excedidos por las raíces de la ecuación (87) (§ 25). Por lo tanto, se puede calcular el valor de la expresión, cuya nulidad (= 0) es la condición de esta ecuación, tanto para uno como para el otro supuesto del signo ambiguo, para cada instante de los tiempos intermedios especificados, y basar su solución en un serie de valores que así se han dado a conocer.

Si cuando, al resolver la ecuación, se parte de los valores calculados de su expresión, entonces la forma de obtener ello es obviamente irrelevante: se llegará a conocerla más fácilmente, que de la forma (87), si se usa la reducción de la (86), a esto se evita lo que sucede cuando primero se busca el valor de $\cos \eta$ perteneciente a un

instante dado, luego los dos valores de **p** que le corresponden, y (luego) con estos se calcula la expresión (86).

Esto es exactamente lo mismo que exige la forma de determinar los tiempos buscados, mencionada al comienzo de este apartado.

§ 28.

Ahora he dado métodos estrictamente correctos y directos para satisfacer las demandas hechas en el **análisis de los eclipses** en el apartado § 5, y los he llevado a cabo para el caso de una distancia considerable del vértice del cono de sombra lunar, también en un ejemplo.

Este caso esta, a excepción del contacto interno entre los limbos del Sol y de la Luna, siempre presente. En el caso de tales contactos, sin embargo, pueden ser necesarias algunas desviaciones de las normas desarrolladas para aquellos, sobre las cuales ahora diré lo que es necesario.

Estas desviaciones surgen en su mayor parte de una gran diferencia en la ecuación cúbica a resolver en los diferentes tipos de eclipses. Para que uno pueda pasarlas por alto fácilmente, he sustituido las expresiones (40) de los coeficientes **a, b, c,...** de la expresión de **P²**, en las expresiones de los coeficientes de la ecuación cúbica (47) y éstas en los elementos originales **x, y, s, d** y en la cantidad de la (26) anteriores:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & s^2 * (1 - e^2 * (\cos d)^2) / (1 - e^2) + \\ & + 2 * s * y * (e^2 * \cos d * \sin d) / (1 - e^2) + \\ & + y^2 * (1 - e^2 * (\sin d)^2) / (1 - e^2) + x^2 \end{aligned}$$

He encontrado:

Segunda sección. Ejercicio 4

$$\begin{aligned}
 -A &= ((1 - x^2) * (1 - e^2 * (\cos d)^2) - y^2) / (1 - e^2) - \\
 &\quad - i^2 * (1 - \sigma^2 + (1 - e^2 * (\sin d)^2) / (1 - e^2) - \\
 &\quad - x^2 * e^2 * (\cos d)^2) / (1 - e^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= i^2 * (\sigma^2 - 1) * (1 - x^2 - y^2 + 1 - e^2 * (\cos d)^2) - \\
 &\quad - i^2 * (1 - e^2 * (\sin d)^2 - s^2) / (1 - e^2)
 \end{aligned}$$

$$-C = i^2 * (\sigma^2 - 1)^2 / (1 - e^2) \dots \dots \dots (88)$$

Dado que i^2 siempre es muy pequeño, el tamaño de estos coeficientes varía mucho dependiendo de si s , y por lo tanto σ , es pequeño o grande.

Para valores pequeños de estas magnitudes, como los que ocurren solo cuando los limbos del Sol y de la Luna se tocan internamente, B y C son muy pequeños, por lo que la ecuación tiene entonces dos raíces muy pequeñas; para valores más grandes, como aparecen en todos los otros eclipses causados por la Luna, es, y por lo tanto $i^2 * (\sigma^2 - 1)$, deben contarse en el mismo orden de magnitud al que pertenecen x e y , por lo que los tres coeficientes de la ecuación, y para que sus 3 raíces, sean del mismo orden; finalmente, para valores aún mayores, como los que tienen lugar en el paso de los planetas interiores por el Sol, A se vuelve muy pequeño en comparación con B y C , y la ecuación adquiere dos raíces muy grandes. Estas diferencias en la ecuación cúbica hacen que la manera de resolverlas por aproximaciones sucesivas, que en los dos últimos casos conduce rápidamente al conocimiento de sus raíces, deba ser sustituida en el primero por otra que ofrezca la misma ventaja. Ahora proseguiré con este caso.

Si i y $i * s$ son magnitudes pequeñas de primer orden, entonces la raíz g es de segundo orden y se encuentra, según el apartado § 13,

Segunda sección. Ejercicio 4

entre límites que, junto con d , e , f , son de segundo orden. El producto C de las tres raíces es de cuarto orden, $g' * g''$ así del segundo; pero la suma $g' + g''$ tiene, según la expresión de A ; i no al factor. Por lo tanto, a menos que A sea tan pequeño como para ser considerado de primer orden, la ecuación cúbica tiene una raíz que se le aproxima y, además de g , otra raíz de segundo orden; pero si A es muy pequeño, lo cual, debido a la rapidez de los cambios en x e y , sólo puede ocurrir durante un corto tiempo, entonces g' y g'' son ambas muy pequeñas o ambas imaginarias.

Hay que separar estos dos casos si se buscan reglas que, mediante aproximaciones sucesivas, conduzcan rápidamente al conocimiento de las raíces de la ecuación. Si A es considerablemente mayor que i , que es siempre el caso cuando la distancia del eje del cono de sombra lunar desde el centro de la Tierra no es aproximadamente igual a su radio (terrestre), entonces la raíz de la ecuación, entonces real y considerablemente diferente de g , donde i se denota por g'' , se puede determinar fácilmente por aproximaciones sucesivas. Es decir, si se da a la ecuación (47) en la forma:

$$g'' = A - B / g'' + C / g''^2$$

por lo tanto, su primer término es solo una aproximación, que cuando se usa para calcular los siguientes términos da un valor más aproximado, etc. -Cuando uno haya evaluado g'' de esta (formula), obtiene las dos raíces restantes de la fórmula:

$$(A - g'') / 2 \pm (((A - g'') / 2)^2 - C / g'')^{0,5}$$

pero para la cual, por la pequeñez de estas raíces, es mejor aplicar la siguiente

$$(B - C / g'') / (2 * g'') \pm ((B - C / g'')^2 - 4 * C * g'')^{0,5} / (2 * g'')$$

Segunda sección. Ejercicio 4

Si el cono de sombra lunar está completamente fuera de la Tierra, se halla entonces, según el apartado § 13, g siendo la menor de las raíces de la ecuación, que entonces son reales; cuando está completamente (sobre la superficie) de la Tierra, g es la mayor de ellas (raíces): en el primer caso g se encuentra tomando negativamente la parte ambigua de esta expresión (luego del \pm), en el segundo tomándola positivamente.

Por otro lado, si A es muy pequeño, resulta la siguiente forma de la ecuación:

$$g = C / (B - A * g + g^2)$$

(y) por aproximaciones sucesivas para determinar la raíz cuadrada de g . Porque el primer término de su denominador es del segundo orden, el segundo (término) del orden superior (dado que g del **segundo** (orden) y A es muy pequeño), el tercero del cuarto (orden); ya que inicialmente sólo se considera el primer término, o porque, debido a la supuesta pequeñez de A , esta es aproximada

$$= i^2 * (\sigma^2 - 1) * (1 - e^2 * \cos d^2) / (1 - e^2)$$

como primera aproximación al valor de g

$$= -i^2 * (\sigma^2 - 1) * (1 - e^2 * \cos d^2)$$

puede ser aceptada. Esta (fórmula) da una aproximación más avanzada, etc. -Dado que continua que la ecuación cúbica, en el caso de una pequeña distancia desde el vértice del cono de sombra lunar a la Tierra, se puede resolver fácilmente si se conocen sus coeficientes A , B , C , por lo que en este caso se proporciona el conocimiento tabular de los valores de estas cantidades para los tiempos para los

Segunda sección. Ejercicio 4

que se ha calculado x, y, s , etc., la misma ventaja que, en el apartado § 18, impulsó la introducción de μ, v, ξ .

Si se quiere tratar todos los contactos internos de los limbos del Sol y de la Luna según las mismas reglas, se deben aplicar las dadas en el apartado § 7, en cuanto se distinguen los casos en que la punta del cono de sombra lunar pasa (toca) la Tierra o no, no efectivamente. Si esto sucede, la expresión desarrollada en el apartado § 19, que da la determinación entre el principio y el fin del eclipse, debe también modificarse haciéndola depender de la expresión de ζ utilizada en el apartado § 7. Esta es

$$\zeta = (P - \theta) / m'' + s$$

y por su sustitución la fórmula (70) se convierte en:

$$-(P - \theta) * (V - W * s - W * (P - \theta) / m'') / m''$$

de donde continua que el contacto de los limbos perteneciente al principio o al final (del eclipse), según sea el caso, es positivo o negativo.

$$(P - \theta) * (V - W * s - W * (P - \theta) / m'') / m''$$

Se escribe para ello

$$(P - \theta) * (\alpha + b * \cos p + \tau * \sin p - (\alpha' + b' * \cos p + \tau' * \sin p) * (P - \theta) / m'') / m'' \dots \dots \dots (89)$$

Teniendo esto, α, b, τ , etc. tienen el siguiente significado:

$$\alpha = -i * x * \cos d * (d(\mu' - a) / dt) + i * y * (dd / dt) - i * (ds / dt)$$

Segunda sección. Ejercicio 4

$$\mathfrak{b} = (dy / dt) - x * \sin d * (d(\mu' - a) / dt) - s * (dd / dt)$$

$$\mathfrak{r} = (dx / dt) + y * \sin d * (d(\mu' - a) / dt) + \\ + s * \cos d * (d(\mu' - a) / dt)$$

$$\mathfrak{a}' = -(di / dt)$$

$$\mathfrak{b}' = -(1 + i^2) * (dd / dt)$$

$$\mathfrak{r}' = -(1 + i^2) * \cos d * (d(\mu' - a) / dt)$$

La solución de las ecuaciones (73) dadas en el apartado § 21 experimental, en el presente caso, el cambio de la cantidad a representar por la fórmula de interpolación, ahora $A = d + f - a$, pero la designada por ζ se convierte en

$$\zeta = g \pm 2 * (C / g)^{0,5} = g \pm 2 * (B - A * g + g^2)^{0,5}$$

El presente caso no trae consigo más cambios a la normativa (metodología) anterior.

§ 29.

Para completar el ejemplo tomado del eclipse solar del **15 de mayo de 1836**, también en relación al contacto interno de los limbos, y para que quede clara la magnitud de las cantidades utilizadas y sus cambios, daré sus valores numéricos, para los mismos instantes, calculados, para los que se aplica la anterior información análoga, aquí los informo.

Segunda sección. Ejercicio 4

Los valores de σ y δ' quedan como se indica en el apartado § 16; los valores de σ , δ , ε correspondientes al contacto interior de los limbos, como (también) les dan las fórmulas (26), asumiendo los valores de s (§ 4) aplicables a ese contacto, son:

Hora 1° Merid, Paris	σ	δ	ε
11h 15m 46s	+4,203662108	18° 03' 50,82"	-21° 48' 51,61"
12h 15m 46s	+4,073360991	20° 37' 25,95"	-15° 23' 45,97"
13h 15m 46s	+4,000460623	23° 08' 53,41"	-08° 38' 08,11"
14h 15m 46s	+3,988052804	25° 38' 09,83"	-01° 43' 16,60"
15h 15m 46s	+4,036638890	28° 05' 13,31"	+05° 07' 59,13"
16h 15m 46s	+4,144026271	30° 30' 02,77"	+11° 43' 30,74"
15h 15m 46s	+4,305761796	32° 52' 38,50"	+17° 53' 46,22"

Los valores de α' , β' , γ' utilizados en las fórmulas del apartado § 7 se derivan del cálculo que dio como resultado los números que se acaban de dar:

Hora 1° Merid. Paris	α'	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$
11h 15m 46s	-1,562075000						
12h 15m 46s	-1,081439000	+0,48063600					
13h 15m 46s	-0,600667000	+0,48077200	+0,00013600				
14h 15m 46s	-0,119791000	+0,48087600	+0,00010400	-0,00003200			
15h 15m 46s	+0,361156000	+0,48094700	+0,00007100	-0,00003300	-0,00000100		
16h 15m 46s	+0,842141000	+0,48098500	+0,00003800	-0,00003300	+0,00000000	+0,00000100	
15h 15m 46s	+1,323130000	+0,48098900	+0,00000400	-0,00003400	-0,00000100	-0,00000100	-0,000002

Hora 1° Merid. Paris	β'	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$
11h 15m 46s	+3,710289000						
12h 15m 46s	+3,675500000	-0,03478900					
13h 15m 46s	+3,636688000	-0,03881200	-0,00402300				
14h 15m 46s	+3,593848000	-0,04284000	-0,00402800	-0,00000500			
15h 15m 46s	+3,546977000	-0,04687100	-0,00403100	-0,00000300	+0,00000200		
16h 15m 46s	+3,496080000	-0,05089700	-0,00402600	+0,00000500	+0,00000800	+0,00000600	
15h 15m 46s	+3,441160000	-0,05492000	-0,00402300	+0,00000300	-0,00000200	-0,00001000	-0,000016

Hora 1° Merid. Paris	γ'	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$
11h 15m 46s	+1,210136000						
12h 15m 46s	+1,383278000	+0,17314200					
13h 15m 46s	+1,554794000	+0,17151600	-0,00162600				
14h 15m 46s	+1,724666000	+0,16987200	-0,00164400	-0,00001800			
15h 15m 46s	+1,892877000	+0,16821100	-0,00166100	-0,00001700	+0,00000100		
16h 15m 46s	+2,059411000	+0,16653400	-0,00167700	-0,00001600	+0,00000100	+0,00000000	
15h 15m 46s	+2,224258000	+0,16484700	-0,00168700	-0,00001000	+0,00000600	+0,00000500	+0,000005

Segunda sección. Ejercicio 4

Las segundas diferencias son aquí, como en todos los casos similares, casi constantes; pero las series de las diferencias de σ , δ , ε sólo convergen cuando el vértice del cono de sombra lunar no pasa cerca del centro de la Tierra. Si es necesario, σ , δ , ε deben derivarse de α' , β' , γ' .

Los valores de los (logaritmos) de x , y' , s' que se utilizan en el cálculo de a , b , c , etc. (40) son, según el apartado § 3 y las fórmulas (41):

Hora 1° Merid. Paris	x	y'	s'
11h 15m 46s	6,401741006	0,018024462	3,903509135
12h 15m 46s	9,246941285	0,119485444	3,926988234
13h 15m 46s	0,166481584	0,294207812	3,946198253
14h 15m 46s	0,834788389	0,468672423	3,961115446
15h 15m 46s	0,361156221	0,642867691	3,971733500
16h 15m 46s	0,842140783	0,816780010	3,978065229
15h 15m 46s	1,323130559	0,990397647	3,980086401

De esta (tabla) y de los otros números ya dados, los valores de a , b , c , etc., se consiguen de las fórmulas (40):

Hora 1° Merid. Paris	a	b	c	d	e	f
11h 15m 46s	-1,445101000	-0,0011537	-0,0280517	-0,0003549	+0,0000018	-0,0003012
12h 15m 46s	-0,018198200	+0,0020114	-0,0195371	-0,0003317	-0,0000027	-0,0003052
13h 15m 46s	+0,558220000	+0,0051993	-0,0109046	-0,0003176	-0,0000037	-0,0003099
14h 15m 46s	+0,775358500	+0,0083996	-0,0021829	-0,0003127	-0,0000012	-0,0003151
15h 15m 46s	+0,469432000	+0,0116014	+0,0065988	-0,0003169	+0,0000049	-0,0003209
16h 15m 46s	-0,359418000	+0,0147943	+0,0154114	-0,0003302	+0,0000146	-0,0003272
15h 15m 46s	-1,710908000	+0,0179680	+0,0242257	-0,0003526	+0,0000277	-0,0003341

He encontrado los coeficientes A , B , C de la ecuación cúbica (47):

Hora 1° Merid. Paris	A	B	C
11h 15m 46s	+1,444445000	-0,00015994	-0,00000012532
12h 15m 46s	+0,181345000	+0,00026974	-0,00000010963
13h 15m 46s	-0,558847000	+0,00049612	-0,00000010150
14h 15m 46s	-0,775986000	+0,00056199	-0,00000010016
15h 15m 46s	-0,470070000	+0,00047743	-0,00000010547

Segunda sección. Ejercicio 4

16h 15m 46s	+0,358761000	+0,00021998	-0,00000011793
15h 15m 46s	+1,710221000	-0,00026539	-0,00000013869

Finalmente los coeficientes de la fórmula (89) son:

Hora 1° Merid. Paris	a	b	c	a'	b'	c'
11h 15m 46s	+0,001664000	+0,307336	-0,490866	0,000000	-0,000164	+0,247657
12h 15m 46s	+0,001136000	+0,266323	-0,481606	0,000000	-0,000164	+0,247643
13h 15m 46s	+0,000608000	+0,225245	-0,471324	0,000000	-0,000163	+0,247629
14h 15m 46s	+0,000080000	+0,184106	-0,460019	0,000000	-0,000163	+0,247615
15h 15m 46s	-0,000448000	+0,142908	-0,447693	0,000000	-0,000163	+0,247601
16h 15m 46s	-0,000976000	+0,101655	-0,434346	0,000000	-0,000163	+0,247587
15h 15m 46s	-0,001504000	+0,060351	-0,419979	0,000000	-0,000163	+0,247573

§ 30.

Aunque las exigencias planteadas en el análisis de los eclipses en el apartado § 5, quedan satisfechas por lo (planteado) anteriormente, así que continuo con mis análisis (en el siguiente ejercicio 5).

Ejercicio 5.

Determinar la ruta del eclipse central sobre la Tierra y las horas de su comienzo y finalización

Es mucho más simple que los problemas ya resueltos, porque en él el cono de sombra lunar se convierte en una línea recta (sólo su eje), y su línea de intersección con la superficie de la Tierra se convierte en un punto; puede verse como el caso especial de los (problemas) anteriores, en el que tanto i como l desaparecen. Las ecuaciones básicas (2) se utilizan para este ejercicio

$$0 = y - \eta$$

$$0 = x - \xi$$

o de las fórmulas (17):

$$y = w * \cos d * (1 - e^2)^{0,5} - v * \sin d$$

$$x = u$$

Si se introducen r' , d' , y' , para que a través ellos se determinan

$$r' * \cos d' = \cos d * (1 - e^2)^{0,5}$$

$$r' * \sin d' = \sin d$$

$$y' = y / r'$$

estas ecuaciones se convierten en:

$$y' = w * \cos d' - v * \sin d'$$

$$x = u$$

que, combinado con $1 = u^2 + v^2 + w^2$, da como resultado

$$\sin d'^2 = (w - y' * \cos d')^2 + (x^2 + y'^2) * \sin d'^2$$

o

$$w = y' * \cos d' \pm \sin d' * (1 - x^2 - y'^2)^{0,5}$$

en cuya expresión, si se ha de indicar, desde los dos puntos de la Tierra así determinados, aquellos en el horizonte sobre el cual se está produciendo el **eclipse central**, según la observación anterior, se debe tomar el signo superior (+). Entonces obtienes:

$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= -y' * \sin d' + \cos d' * (1 - x^2 - y'^2)^{0,5} \\ w &= y' * \cos d' + \sin d' * (1 - x^2 - y'^2)^{0,5} \dots\dots\dots (90) \end{aligned}$$

mediante las cuales se determina (cada) punto (de la línea) central sobre la Tierra viéndose el eclipse en un momento dado.

Los instantes en que comienza el eclipse central y deja de ser visible en la Tierra son los que satisfacen la ecuación (eje del cono de sombra lunar en el horizonte):

$$0 = 1 - x^2 - y'^2 \dots\dots\dots (91)$$

Los denotaré por **t** y **t'**. Los primeros y últimos puntos de la Tierra en los que se producen el eclipse central pueden verse a partir de las fórmulas (90), si **x**, **y'**, **d'** se suponen para los tiempos **t** y **t'** y por lo tanto se omite el último término de las expresiones de **v** y **w** dadas por estas fórmulas.

Segunda sección. Ejercicio 5

Para resolver el presente problema mediante el cálculo más simple posible, se deben definir x e y' (por medio de) las expresiones:

$$x = m * \sin M + n * \sin N * t$$

$$y' = m * \cos M + n * \cos N * t$$

cuyos términos independientes de t son los valores de x e y' pertenecientes al tiempo inicial de t , mientras que $n * \sin N$ y $n * \cos N$, y por lo tanto n y N , cambian poco durante el transcurso del eclipse.

Si se supone que los valores de x e y' se calculan de hora en hora, y de hecho en un número impar (de cantidad de horas, aquí 7), como en el ejemplo seguido hasta ahora, entonces la fórmula de **interpolación newtoniana** sirve para el **caso 2 (§ 17)** que es la que se debe utilizar, y según ella, cuando estos valores se (encuentran) a través de

$$\dots\dots\dots X_{-3}, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_{+1}, X_{+2}, X_{+3}, \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots Y'_{-3}, Y'_{-2}, Y'_{-1}, Y'_0, Y'_{+1}, Y'_{+2}, Y'_{+3}, \dots\dots\dots$$

Designando (para x_0 e y'_0)

$$x_0 = m * \sin M$$

$$y'_0 = m * \cos M$$

y $n * \sin N$ para:

$t = -3$	$b + d * 4 / 3 + f / 3 - (c * 3 / 2 + e + g)$	$(x_0 - x_{-3}) / 3$
$t = -2$	$b + d / 2 - (c + e / 4)$	$(x_0 - x_{-2}) / 2$
$t = -1$	$b - c / 2$	$(x_0 - x_{-1})$
$t = 0$	$b - d / 6 * f / 30$	
$t = +1$	$b + c / 2$	$(x_{+1} - x_0)$

Segunda sección. Ejercicio 5

$t = +2$	$b + d / 2 + (c + e / 4)$	$(x_{+2} - x_0) / 2$
$t = +3$	$b + d * 4 / 3 + f / 3 + (c * 3 / 2 + e + g)$	$(x_{+3} - x_0) / 3$

así como expresiones similares para $n * \cos N$ (en la última columna en vez de x escribir y). A partir de esta se obtienen los valores de n y N de hora en hora.

Si ahora determinamos k y ψ por (medio de):

$$\begin{aligned} k * \cos \psi &= m * \cos (M - N) + n * t \\ k * \sin \psi &= m * \sin (M - N) \end{aligned}$$

así es como se obtienen

$$\begin{aligned} x &= k * \sin (\psi + N) \\ y' &= k * \cos (\psi + N) \end{aligned}$$

y por lo tanto (según las fórmulas) (90):

$$\begin{aligned} u &= k * \sin (\psi + N) \\ v &= (1 - k^2)^{0,5} * \cos d' - k * \sin d' * \cos (\psi + N) \\ w &= (1 - k^2)^{0,5} * \sin d' + k * \cos d' * \cos (\psi + N) \dots \dots \dots (92) \end{aligned}$$

dado que estas fórmulas se pueden establecer, de forma habitual, para el cálculo. Esto determina el punto sobre la Tierra donde se ve el eclipse central (sobre la línea central) en el tiempo t .

Todavía existen los instantes t y t' en los que el eclipse se ve en su inicio (comienzo) y en su final en el (eclipsado) central. La ecuación (91) requiere que, en estos instantes, $k = 1$; quedando

$$1 = (m * \cos (M - N) + n * t)^2 + m^2 * (\sin (M - N))^2$$

Segunda sección. Ejercicio 5

y resulta que, si

$$\sin \psi = m * \sin (M - N)$$

queda establecida y (si) se toma ψ menor que 90° :

$$\begin{aligned} n * t &= -m * \cos (M - N) - \cos \psi \\ n * t' &= -m * \cos (M - N) + \cos \psi \dots \dots \dots (93) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} t &= -\sin (M - N + \psi) / (n * \sin (M - N)) \\ t' &= +\sin (M - N - \psi) / (n * \sin (M - N)) \dots \dots \dots (93*) \end{aligned}$$

Estas expresiones suponen que n y N , la última de los cuales también aparece en la expresión de $\sin \psi$, se conocen para los instantes t y t' : inicialmente uno puede asumir sus valores para $t = 0$; (y) cuando se haya encontrado los instantes aproximados que se buscan, se repite el cálculo con valores corregidos de n y N , etc. (y así sucesivamente). Estos cálculos convergen muy rápidamente a la verdad (al resultado esperado) debido a la lentitud de los cambios en n y en N .

§ 31.

No omito aplicar lo dispuesto en el apartado anterior al eclipse solar del **15 de mayo de 1836**.

Los valores de x ya están dados en el apartado § 4; (aquí) los de r' , d' e y'

Hora 1° Merid. Paris	r'	d'	y'
11h 15m 46s	+0,997024889	18° 59' 36,12"	-0,0632940
12h 15m 46s	+0,997025348	19° 00' 09,98"	+0,1110995
13h 15m 46s	+0,997025578	19° 00' 43,80"	+0,2852595

Segunda sección. Ejercicio 5

14h 15m 46s	+0,997026037	19° 01' 17,58"	+0,4591720
15h 15m 46s	+0,997026496	19° 01' 51,33"	+0,6328240
16h 15m 46s	+0,997026726	19° 02' 25,05"	+0,8062030
15h 15m 46s	+0,997027185	19° 02' 58,74"	+0,9792970

De los valores de x e y' se siguen:

Hora 1° Merid. Paris	$n * \sin N$	$N * \cos N$	n	N
11h 15m 46s	+0,4807613	+0,1741553	+0,511333092	70° 05' 13,7"
12h 15m 46s	+0,4808240	+0,1740363	+0,511351460	70° 06' 07,4"
13h 15m 46s	+0,4808760	+0,1739125	+0,511358171	70° 07' 01,5"
14h 15m 46s	+0,4809170	+0,1737843	+0,511353226	70° 07' 55,8"
15h 15m 46s	+0,4809470	+0,1736520	+0,511336507	70° 08' 50,1"
16h 15m 46s	+0,4809660	+0,1735155	+0,511308014	70° 09' 44,5"
15h 15m 46s	+0,4809737	+0,1733750	+0,511267634	70° 10' 38,8"

Al tomar la media de los 7 instantes en el tiempo para los que se aplican estas declaraciones, en el tiempo inicial, es

$$x_0 = -0,119791 \quad y_0 = +0,459172$$

y corresponden a estos valores:

$$m = +0,474540627 \quad M = 345^\circ 22' 41,91''$$

El primer cálculo de aproximación de la fórmula (93), basado en $n = +0,511352048$, $N = 70^\circ 08'$, da como resultado estas horas y valores que les corresponden:

$$\begin{aligned} t &= -1,8083, & t' &= +1,6386 \\ n &= +0,511353697 & n &= +0,511319435 \\ N &= 70^\circ 06' 17,75'' & N &= 70^\circ 09' 24,83'' \end{aligned}$$

El segundo cálculo (de aproximación) basado en esto da

$$t = -1,808783, \quad t' = +1,639111$$

Segunda sección. Ejercicio 5

$$n = -1^{\text{h}} 48' 31,62''$$

$$n = +1^{\text{h}} 38' 20,80''$$

o, en las horas del **primer meridiano (de París)**, cuando en el eclipse central, el primero y último contacto se dan (aparecen) sobre la Tierra son:

$$15.05.1836$$

y $15.05.1836$

$$12^{\text{h}} 27' 14,38''$$

$$15^{\text{h}} 24' 06,80''$$

Para determinar el primero y el último punto del eclipse sobre la Tierra donde se ve el eclipse central, uno tiene

ψ	208° 11' 55,65"	331° 47' 55,13"
$\psi + N$	278° 18' 13,40"	41° 57' 19,96"
d'	19° 00' 16,65"	19° 02' 14,70"

De esto se obtiene poniendo $k = 1$ en las fórmulas (92):

u	+0,101059466	+0,668553859
v	+0,021263204	+0,412248040
w	+0,136548521	+0,702989762
$\mu' - a + \omega$	267° 16' 44,05"	109° 56' 32,53"
$\tan \phi_1$	+0,137839599	+0,988455677

En el apartado § 4 se encuentra, para los tiempos t y t' :

μ' (en ° de circunferencia)	60° 03' 50,12"	111° 55' 26,14"
a	52° 16' 22,45"	52° 24' 38,60"
$\mu' - a$	7° 47' 27,67"	59° 30' 47,54"

y también $\tan \phi = \tan \phi_1 + 0,00144067$. Se obtiene la posición geográfica de los dos puntos buscados:

ω	259° 29' 16,38"	50° 25' 44,99"
ϕ	+7° 52' 26,51"	+44° 45' 46,02"

Del cálculo de otros puntos de la curva en los que se ve centralmente el eclipse (eclipse máximo), es decir, de la aplicación de las fórmulas (92) a los casos en que k no es = 1, daré también un ejemplo, a saber,

Segunda sección. Ejercicio 5

aquel para **15^h 40' 54"** referido al **primer meridiano (de París)**. Para este instante **t = 13^h 25' 08"**, **d' = 19° 02' 05,45"**, **n = +0,511326028**, **N = 70° 09' 12,89"**. De esto obtienes:

ψ	328° 25' 09,17"
k	+0,902365536
$(1 - k^2)^{0,5}$	+0,430971548
u	+0,562632480
v	+0,177317337
w	+0,807467219
$\mu' - a + \omega$	72° 30' 26,67"
$\tan \phi_1$	+1,368791501

y finalmente el punto que se busca:

ω	16° 17' 51,98"
ϕ	53° 56' 24,25"

§ 32.

Al final de esta sección mencionaré las aproximaciones a las resoluciones que he dado en ella.

Si se supone que la Tierra es una esfera, la expresión de **P²** se convierte en:

$$(1 + i^2) * (1 - x^2 - y^2) - l^2 + 2 * l * (x * \sin p + y * \cos p) + i^2 * (x * \sin p + y * \cos p)^2$$

Esta es, con relación a **x * sen p + y * cos p**, (ecuación) de segundo grado, por lo que la solución de la ecuación **P² = 0**, suponiendo que la Tierra sea esférica, ya no conduce a una ecuación cúbica. Se iguala con relación a las rectas trigonométricas de **p** de segundo grado, si además de la excentricidad de los meridianos terrestres, también se desprecia **i**, donde no se multiplica por **s**, se desprecia (elimina), descuido que vuelve a la suposición de que las magnitudes

Segunda sección. Ejercicio 5

aparentes de los dos astros son independientes de sus posiciones en el horizonte. Si querés permitirte ambos descuidos, será

$$P^2 = 1 - x^2 - y^2 - l^2 + 2 * l * (x * \sin p + y * \cos p) \dots\dots\dots (A)$$

y la solución del **ejercicio 1**, se simplifica mediante la correspondiente simplificación de las expresiones de

$$\begin{aligned} a &= x - l * \sin p & \alpha &= 0 \\ b &= -(y - l * \cos p) * \sin d & \beta &= \cos d \\ c &= (y - l * \cos p) * \cos d & \gamma &= \sin d \end{aligned}$$

donde $m'' = 1$, $m' = 0$ y las fórmulas (21) se convierten en

$$\begin{aligned} \cos \phi * \sin (\mu' - a + \omega) &= x - l * \sin p \\ \cos \phi * \cos (\mu' - a + \omega) &= -(y - l * \cos p) * \sin d + P * \cos d \\ \sin \phi &= (y - l * \cos p) * \cos d + P * \sin d \dots\dots\dots (B) \end{aligned}$$

Las razones que dieron motivo para buscar los cambios en las fórmulas (21) contenidas en las fórmulas (24) y (35) también desaparecen.

La expresión desarrollada en el apartado § 19, cuyo signo marca la distinción entre el principio y el fin del eclipse, se convierte ahora en (70):

$$(s - P) * (V - W * P)$$

o

$$(s - P) * (a + b * \cos p + t * \sin p + (a' + b' * \cos p + t' * \sin p) * P) \dots\dots\dots (C)$$

Segunda sección. Ejercicio 5

pero donde α y α' desaparecen y se toman en cuenta

$$\dot{b} = (dy / dt) - x * \sin d * (d(\mu' - a) / dt)$$

$$\dot{c} = (dx / dt) + y * \sin d * (d(\mu' - a) / dt)$$

$$\dot{b}' = -d^2 / dt$$

$$\dot{c}' = \cos d * (d(\mu' - a) / dt)$$

El **ejercicio 2** enumera ahora, en lugar de las ecuaciones (73)

$$0 = x^2 + y^2 - 1 + 2 * l - l^2$$

o

$$y \dots \dots \dots x^2 + y^2 = (1 + l)^2 \dots \dots \dots (D)$$

de donde las horas τ , τ' y τ_1 , τ_1' se encuentran en la forma que he empleado. Los valores de p que les pertenecen son los que provocan la desaparición de P , es decir, los que satisfacen a

$$x * \sin p + y * \cos p = (x^2 + y^2 + l^2 - 1) / (2 * l) = l^2 \pm 1$$

o

$$\sin p = x / (l \pm 1), \cos p = y / (l \pm 1)$$

Sustituyéndolos en las fórmulas (B) a partir de las cuales P desaparece, se obtiene la determinación de los puntos O , O' y O_1 , O_1' ; a saber, O y O' surgen de

Segunda sección. Ejercicio 5

$$\begin{aligned} (1 + l) * \cos \phi * \sin (\mu' - a + \omega) &= x \\ (1 + l) * \cos \phi * \cos (\mu' - a + \omega) &= -y * \sin d \\ (1 + l) * \sin \phi &= y * \cos d \dots \dots \dots (E) \end{aligned}$$

como O_1 y O_1' de

$$\begin{aligned} (1 - l) * \cos \phi * \sin (\mu' - a + \omega) &= x \\ (1 - l) * \cos \phi * \cos (\mu' - a + \omega) &= -y * \sin d \\ (1 - l) * \sin \phi &= y * \cos d \dots \dots \dots (E^*) \end{aligned}$$

Los valores de p correspondientes al [ejercicio 3](#) se pueden encontrar a partir de

$$x * \sin p + y * \cos p = (x^2 + y^2 + l^2 - 1) / (2 * l) \dots \dots (F)$$

cuando se usa para determinar los puntos en la **curva-O**, P desaparece de las fórmulas **(B)**.

Ahora, basando la solución del [ejercicio 4](#) en la expresión **(C)** de la cual a y a' desaparecen, se requiere el cumplimiento de la ecuación **(81)**, por lo tanto simplificada, a saber

$$0 = b * \cos p + c * \sin p - (b' * \cos p + c' * \sin p) * P$$

o, según las notaciones introducidas en el apartado [§ 25](#) y la sustitución de la expresión **(A)**,

$$\begin{aligned} 0 = (1 - x^2 - y^2 - l^2 + 2 * l * (x * \sin p + y * \cos p))^{0,5} * \\ * \log (\lambda' * \sin (p - L') / (\lambda * \sin (p - L))) \dots \dots (G) \end{aligned}$$

que debe ser satisfecha por prueba y error.

Segunda sección. Ejercicio 5

La solución al **ejercicio 5** no es menos sencilla para la verdadera forma de la Tierra, que para el supuesto de que sea esférica; sólo que en el último caso se basa en **x, y, d**, cuando en realidad debería basarse en **x, y', d'**. Dado que la aplicación de las fórmulas (del apartado **§ 30**) que dan como resultado **y', d'** a partir de **y, d** causan problemas insignificantes, la abreviatura del cálculo difícilmente puede convertirse en una razón para utilizar una aproximación en lugar de la solución correcta a este problema. Por lo tanto, uno determinará correctamente la curva en la Tierra en la que el eclipse se ve centralmente. A partir de ello, suponiendo un valor muy pequeño de **l**, se puede, mediante un cálculo fácil, obtener el conocimiento (detalle) de las dos partes de la **curva-M** que la incluyen; cuyo cálculo desarrollaré aquí, ya que los **eclipses anulares y totales del Sol** no son infrecuentes en el caso de esta suposición, y aunque solo se requiere un conocimiento superficial de las curvas relativas al contacto exterior de los limbos del Sol y de la Luna, se requiere un conocimiento más exacto del área de la Tierra en el que el (contacto) interior sea visible.

La suposición a seguir aquí es que **(s - ζ) * tan f**, o **l - i * ζ**, son de una magnitud muy pequeña, cuyo cuadrado, etc., puede despreciarse. Si se escribe **ε** para ello, de modo que las ecuaciones **(2)** se conviertan en

$$\begin{aligned}\eta &= y - \varepsilon * \cos p \\ \xi &= x - \varepsilon * \sin p\end{aligned}$$

y se suponga que se conoce **ε**, entonces uno encuentra el punto en la Tierra viendo el contacto límite en el ángulo de posición **p**, si uno ingresa (escribe) las fórmulas **(90) y' - ε * cos p / r'** y **x - ε * sen p** respectivamente en lugar de escribir **y'** e **x**. Considerando sólo la primera dimensión de estos cambios en **y'** y **x**, los cambios en **u, v, w** resultantes de ellos son:

Segunda sección. Ejercicio 5

$$\delta * u = \varepsilon * \sin p$$

$$\delta * v = -\varepsilon * \sin p * x^2 * \cos d' / (1 - x^2 - y'^2)^{0,5} - \varepsilon * \cos p * (\sin d' + y' * \cos d' / (1 - x^2 - y'^2)^{0,5}) / r'$$

$$\delta * w = -\varepsilon * \sin p * x^2 * \sin d' / (1 - x^2 - y'^2)^{0,5} + \varepsilon * \cos p * (\cos d' - y' * \sin d' / (1 - x^2 - y'^2)^{0,5}) / r'$$

A partir de esto se encuentran los cambios de ω y ϕ_1 , a saber

$$\cos \phi_1 * \delta * \omega = \delta * u * \cos (\mu' - a + \omega) - \delta * v * (\mu' - a + \omega)$$

$$\delta * \phi_1 = -\delta * u * \sin \phi_1 * \sin (\mu' - a + \omega) - \delta * v * \sin \phi_1 * \cos (\mu' - a + \omega) + \delta * w * \cos \phi_1$$

y, si en las expresiones de $\delta * v$, $\delta * u$, $\delta * w$

$$x = \cos \phi_1 * \sin (\mu' - a + \omega)$$

$$y' = -\cos \phi_1 * \sin d' * \cos (\mu' - a + \omega) + \sin \phi_1 * \cos d'$$

$$(1 - x^2 - y'^2)^{0,5} = \cos \phi_1 * \cos d' * \cos (\mu' - a + \omega) + \sin \phi_1 * \sin d'$$

escribimos:

$$\cos \phi_1 * \delta * w = \varepsilon * \sin p * (\cos \phi_1 * \cos d' + \sin \phi_1 * \sin d' * \cos (\mu' - a + \omega)) / (1 - x^2 - y'^2)^{0,5} + \varepsilon * \cos p * \sin \phi_1 * \sin (\mu' - a + \omega) / (r' * (1 - x^2 - y'^2)^{0,5})$$

$$\delta * \phi_1 = -\varepsilon * \sin p * \sin d' * \sin (\mu' - a + \omega) / (1 - x^2 - y'^2)^{0,5} + \varepsilon * \cos p * \cos (\mu' - a + \omega) / (r' * (1 - x^2 - y'^2)^{0,5}) \dots \dots \text{(H)}$$

Segunda sección. Ejercicio 5

cuyas fórmulas, por lo tanto, determinan los puntos de la curva en los que se ve el contacto de los limbos (de los dos astros) en el instante en que se cumplen en ω y ϕ .

Para que estos puntos pertenezcan a la **curva-M**, es necesario que p , de la ecuación (89), (cumpla):

$$0 = a + b * \cos p + r * \sin p - \\ - (a' + b' * \cos p + r' * \sin p) * (P - \theta) / m''$$

Se considera en consecuencia, entonces, puesto que a y a' son del orden de ε , pero en

$$0 = b * \cos p + r * \sin p - \\ - (b' * \cos p + r' * \sin p) * (P - \theta) / m''$$

y con

$$(P - \theta) / m'' = \zeta - s$$

en

$$0 = (b + b' * (s - \zeta)) * \cos p + (r + r' * (s - \zeta)) * \sin p$$

se pueden juntar. Los dos valores resultantes de p , que son 180° diferentes entre sí, a saber, el

$$\tan p = -(b + b' * (s - \zeta)) / (r + r' * (s - \zeta))$$

en consecuencia, cuando se aplican en las fórmulas (H), resultan los dos puntos buscados de la **curva-M**.

Segunda sección. Ejercicio 5

La expresión de $\delta * \omega$ se vuelve algo más simple si se introducen ϕ y d , en lugar de ϕ_1 y d' , es decir, si

$$\tan \phi * (1 - e^2)^{0,5}, \cos d * (1 - e^2)^{0,5} / r', \sin d / r'$$

para

$$\tan \phi_1, \cos d', \sin d'$$

pueden escribirse. En lugar de la expresión de $\delta * \phi_1$, uno querrá inmediatamente la (expresión) de $\delta * \phi$, razón por la cual puede estar multiplicada en

$$\delta * \phi / \delta * \phi_1 = (1 - e^2)^{0,5} / (1 - e^2 * (\cos \phi_1)^2)$$

Si uno también escribe para ε su prueba, se obtiene

$$\delta * \omega = (s - \zeta) * i * (1 - e^2)^{0,5} * (\sin p * (\cos d + \sin d * \tan \phi * \cos (\mu' - a + \omega)) + \cos p * \tan \phi * \sin (\mu' - a + \omega)) / (r' * (1 - x^2 - y'^2)^{0,5})$$

$$\delta * \phi = (s - \zeta) * i * (1 - e^2)^{0,5} * (-\sin p * \sin d * \sin (\mu' - a + \omega) + \cos p * \cos (\mu' - a + \omega)) / (r' * (1 - e^2 * (\cos \phi_1)^2) * (1 - x^2 - y'^2)^{0,5})$$

Si se introduce m y M , de modo que pasen por y se determinan,

$$\begin{aligned} \sin m * \cos M &= \cos p \\ \sin m * \sin M &= \sin p * \sin d \\ \cos m &= \sin p * \cos d \end{aligned}$$

estas expresiones se convierten en:

Segunda sección. Ejercicio 5

$$\delta * \omega = (s - \zeta) * i * (1 - e^2)^{0,5} * (\cos m + \sin m * \tan \phi * \sin (\mu' - a + \omega + M)) / (r' * (1 - x^2 - y'^2)^{0,5})$$

$$\delta * \phi = (s - \zeta) * i * (1 - e^2)^{0,5} * (\sin m * \cos (\mu' - a + \omega + M)) / (r' * (1 - e^2 * (\cos \phi_1)^2) * (1 - x^2 - y'^2)^{0,5}) \dots (II)$$

La ζ que aparece luego de esto, así como en la expresión de **tan p**, se puede suponer, sin exceder el límite aproximado aquí observado, como lo es para el punto central de la Tierra en el que se ve el eclipse (máximo en la totalidad); entonces

$$\zeta = w * \sin d * (1 - e^2)^{0,5} + v * \cos d;$$

poco difiere de éste

$$(1 - x^2 - y'^2)^{0,5} = w * \sin d' + v * \cos d'$$

cuyo valor ya se ha conocido por la determinación previa de ω y ϕ , es decir, por las fórmulas (92), en las que se le ha dado la designación $(1 - k^2)^{0,5}$. Dado que los dos difieren poco entre sí, y la influencia de su diferencia en $\delta * \omega$ y en $\delta * \phi$ tiene como factor la pequeña magnitud i , se puede asumir el último valor en lugar de ζ sin pérdida de precisión.

Es obvio que este método de aproximación no se puede utilizar cuando $(1 - x^2 - y'^2)^{0,5}$ es muy pequeño, o cuando los dos astros están muy cerca del horizonte. Para dar un ejemplo de su aplicación, doy aquí la determinación así obtenida de los dos puntos de la **curva-M** que pertenecen al instante para el que los calculé al final del apartado § 31. De la información en el apartado § 29 se puede ver para este instante:

Segunda sección. Ejercicio 5

$$\begin{aligned}h &= +0,125634 & h' &= -0,000163 \\t &= -0,4411040 & t' &= +0,274595\end{aligned}$$

en el apartado § 4:

$$s = +3,9707; i = +0,004600435; d = 18^\circ 58' 33,9''$$

en el apartado § 31:

$$r' = +0,997034072; (1 - x^2 - y'^2)^{0,5} = +0,430972938 = \zeta$$

Uno encuentra aquí

$$\begin{aligned}h + h' * (s - \zeta) &= +0,12506 \\t + t' * (s - \zeta) &= +0,43530\end{aligned}$$

donde los valores de

$$p = 163^\circ 58,06' \text{ y } 343^\circ 58,06'$$

y además se llegan a

$$M = 174^\circ 39,71' \text{ y } 354^\circ 39,71'$$

$$\sin m = +0,965294874, \cos m = +0,261168022$$

Desde esto se obtiene, según las fórmulas (I):

$$\begin{aligned}\delta * \omega &= \pm 2^\circ 04' 44'' \text{ (en el signo doble, arriba el (-))} \\ \delta * \phi &= \pm 0^\circ 48' 38'' \text{ (en el signo doble, arriba el (-))}\end{aligned}$$

y si se suma esto a los valores de ω y ϕ encontrados en el apartado § 31, para los dos puntos de la **curva-M**

$$\begin{array}{ll} \omega \pm \delta * \omega = 14^{\circ} 13' 08'' & 18^{\circ} 22' 36'' \\ \phi \pm \delta * \phi = 53^{\circ} 07' 46'' & 54^{\circ} 45' 02'' \end{array}$$

El **Observatorio de Königsberg**, al que pertenece (en estas coordenadas) $\omega = 18^{\circ} 09' 45''$, $\phi = 54^{\circ} 42' 50,5''$, se encuentra entre estos dos (últimos) puntos, y muy cerca del más septentrional, de modo que, según este cálculo, un límite del área en el que se encuentra el eclipse debería haber ocurrido como un eclipse anular un poco al **Norte** del mismo (límite). Pero según la observación en el (mismo) observatorio el eclipse no fue anular, aunque se ha visto desde la parte **Sur** de la ciudad. Este error encuentra su explicación en gran medida en la ausencia de las **tablillas lunares**, que en las **efemérides** y en los **elementos** en los que se basa el cálculo (en el apartado § 4): las observaciones han demostrado realmente que la más septentrional de las dos curvas en el cielo, entre las cuales se desplazaba el disco de la luna, estuvo aproximadamente **4"** al **Sur** de lo que debería haber estado de acuerdo con estos elementos. Sin embargo, una parte del error debe atribuirse al método de aproximación utilizado en el cálculo, que de hecho, en el caso de un valor tan grande de **I**, como es en este eclipse (**= 0,0183**), $\delta * \omega$ y $\delta * \phi$ pueden dar unos minutos de error.

Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra.

§ 33.

En la sección anterior se han determinado los puntos (coordenadas) sobre la Tierra donde se ve el contacto (exterior) de los limbos de los dos astros bajo ciertas condiciones; en la presente se van a determinar los instantes (horas) de los contactos (exteriores) de los limbos en un lugar dado, así como los puntos de la esfera celeste donde estos (contactos) ocurren.

Las horas buscadas son de las ecuaciones (2) o suficientes las de la ecuación:

$$(l - i * \zeta)^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

en la que solo el instante es desconocido. Como esta ecuación es trascendental con respecto al tiempo, sólo puede resolverse experimentalmente o por aproximaciones sucesivas. Utilizaré el último de estos métodos, pero primero la solución de la ecuación cuadrática

$$(c + c' * t)^2 = (a + a' * t)^2 + (b + b' * t)^2 \dots \dots \dots (94)$$

y recordándola, luego reduciré el resto.

Escribimos la ecuación:

$$(a'^2 + b'^2 - c'^2) * t^2 + 2 * (a * a' + b * b' - c * c') * t = c^2 - a^2 - b^2$$

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

si se multiplica por $(a'^2 + b'^2 - c'^2)$ y si se completa el cuadrado, se transforma en:

$$\begin{aligned} ((a'^2 + b'^2 - c'^2) * t + a * a' + b * b' - c * c')^2 = \\ = (a * a' + b * b' - c * c')^2 - (a^2 + b^2 - c^2) * \\ * (a'^2 + b'^2 - c'^2) \end{aligned}$$

en donde, en lugar de la expresión a la derecha del signo igual, también (se puede escribir)

$$\begin{aligned} (c * (a'^2 + b'^2)^{0,5} - c' * (a * a' + b * b') / (a'^2 + b'^2)^{0,5})^2 - \\ - (a * b' + a' * b)^2 * (a'^2 + b'^2 - c'^2) / \\ / (a'^2 + b'^2) \end{aligned}$$

Tomando m , M , n , N según las expresiones

$$\begin{aligned} m * \sin M = a & \quad n * \sin N = a' \\ m * \cos M = b & \quad n * \cos N = b' \end{aligned}$$

y v se determina a través de

$$n * \sin v = c'$$

luego de dividirlo por n' , la ecuación toma la expresión en:

$$\begin{aligned} (n * (\cos v)^2 * t + m * \cos (M - N) - c * \sin v)^2 = (c - m * \sin v * \\ * \cos (M - N))^2 - (m * \cos v * \sin (M - N))^2 \end{aligned}$$

Esta expresión asume que $c' < n$; no citaré la (condición) apropiada para el caso contrario, porque no es necesaria en la aplicación prevista.

Se determina ψ por (medio de)

$$\sin \psi = m * \sin v * \sin (M - N) / (c - m * \sin v * \cos (M - N)) \dots (95)$$

así es como se obtiene:

$$n * (\cos v)^2 * t + m * \cos (M - N) - c * \sin v = \pm (c - m * \sin v * \cos (M - N)) * \cos \psi \text{ (en el signo doble, arriba el (-))}$$

Si se toma $\psi < 90^\circ$ o 90° , según $c - m * \sin v * \cos (M - N)$ sea positivo o negativo, entonces el signo superior (en el signo doble, arriba el (-)) obviamente determina el menor, (el signo) inferior el mayor de los dos valores de que satisfacen la ecuación t . Manteniendo el signo superior para el menor y el inferior para el mayor de estos valores, se tiene:

$$t = - m * (1 \pm \sin v * \cos \psi) * \cos (M - N) / (n * (\cos v)^2) \pm (c * \cos \psi \pm \sin v) / (n * (\cos v)^2) \dots \dots \dots (96)$$

o también eliminando c en la expresión (95):

$$t = - m * (\cos (M - N) \pm (\cos \psi \pm \sin v) * \sin (M - N) / (\cos v * \sin \psi)) / n \dots \dots \dots (97)$$

Si se introduce ψ' , de modo que

$$\begin{aligned} \cos \psi' &= (\cos \psi \pm \sin v) / (1 \pm \sin v * \cos \psi) \\ \sin \psi' &= (\cos v \pm \sin \psi) / (1 \pm \sin v * \cos \psi) \end{aligned}$$

y, consistente con ambas expresiones, queda

$$(\tan \psi') / 2 = ((\tan \psi) / 2) * \tan (45^\circ \pm v / 2) \dots \dots \dots (98)$$

Así será

$$1 \pm \sin v * \cos \psi = \cos v * \sin \psi / \sin \psi'$$

y las fórmulas (96) y (97) se convierten en:

$$t = - \sin \psi * (m * \cos (M - N) \pm (c * \cos \psi')) / (n * \cos v * \sin \psi') \dots \dots \dots (96^*)$$

$$t = - m * \sin (\psi' \pm (M - N)) / (n * \sin \psi') \dots \dots \dots (97^*)$$

Sin embargo, las dos fórmulas (97) no son ventajosas si ψ' es muy pequeño o muy cercano a $= 180^\circ$.

Si uno sustituye la expresión (97) por t e introduce ψ' , uno encuentra

$$\begin{aligned} a + a' * t &= \pm m * \sin (M - N) * \sin (N \pm \psi') / \sin \psi' \\ b + b' * t &= \pm m * \sin (M - N) * \sin (N \pm \psi') / \sin \psi' \\ c + c' * t &= m * \sin (M - N) / \sin \psi' \end{aligned}$$

de donde continua que para el menor de los valores de t que satisface la ecuación (94) (quedan):

$$\begin{aligned} a + a' * t &= - (c + c' * t) * \sin (N - \psi') = (c + c' * t) * \sin (N + 180^\circ - \psi') \\ b + b' * t &= - (c + c' * t) * \cos (N - \psi') = (c + c' * t) * \cos (N + 180^\circ - \psi') \\ \dots \dots \dots &\dots \dots \dots (99) \end{aligned}$$

y para el más grande son

$$\begin{aligned} a + a' * t &= (c + c' * t) * \sin (N + \psi') \\ b + b' * t &= (c + c' * t) * \cos (N + \psi') \dots \dots \dots (99^*) \end{aligned}$$

§ 34.

Si la hora del **primer meridiano (de París)**, que pertenece a un límite donde se tocan (los limbos de) los astros (Sol y Luna) en un lugar dado ω y ϕ , se compone de dos partes τ y t , y τ se considera dado, entonces los valores de τ pertenecientes a $x - \xi$, $y - \eta$, $l - i * \zeta$ también deben tomarse como dados, y los pertenecientes a $\tau + t$ son las sumas de estos valores y sus cambios hasta el instante $\tau + t$.

A medida que τ se acerca a la hora en el que los limbos se tocan tan de cerca, que los cambios entre los dos instantes siempre progresan en el mismo sentido, entonces en la ecuación (94), cualesquiera que sean los valores que cambian a , b , c en el mismo sentido, también se pueden dar a' , b' , c' , en una aproximación a la $\tau + t$ determinada; es decir, su resolución da, en lugar de esta cantidad desconocida, una cantidad que se le acerque más que a τ . Se puede, por lo tanto, a partir del valor supuesto de τ , encontrar una serie de valores τ_1 , τ_2 , ... acercándose progresivamente al instante buscado del contacto de los limbos (de ambos astros), y al parecer cuanto más rápido se acerca, cuanto más cerca del instante, los cambios se vuelven gradualmente proporcionales.

Si el valor asumido de τ es aproximadamente la hora (instante) del **eclipse medio**, las horas de los contactos de los limbos nunca están tan alejados de él, (tanto) que la suposición del tiempo de los cambios proporcionales de $x - \xi$, $y - \eta$, $l - i * \zeta$ entre τ y $\tau + t$, no sería aproximadamente cierta. Esta suposición del valor de τ es en sí misma suficiente para dar una convergencia muy rápida.

La aplicación de lo anterior a la determinación del comienzo y del fin de un eclipse presupone el conocimiento de valores previamente calculados de x , y , l , i , μ' , a , d , es decir, según la observación en el

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

apartado §17, (y) por cuatro tiempos que continúan en progresión aritmética, en cuyo rango se encuentran los instantes buscados. Como resultado, se dan tanto estas variables como sus cambios.

A modo de ejemplo, reproduzco aquí los últimos cuatro valores dados en el apartado §4, relativos al contacto externo de los limbos del Sol y de la Luna el **15 de mayo de 1836**, μ' expresado en partes (grados) del círculo:

Hora 1° Merid. Paris	x	y	l	i
14h 15m 46s	-0,1197910	+0,4578060	+0,5646310	+0,004622852
15h 15m 46s	+0,3611560	+0,6309420	+0,5646780	+0,004622746
16h 15m 46s	+0,8421410	+0,8038060	+0,5647050	+0,004622746
15h 15m 46s	+1,3231300	+0,9763860	+0,5647130	+0,004622746

Hora 1° Merid. Paris	μ'	a	d
14h 15m 46s	87° 16' 11,83"	52° 20' 42,71"	18° 57' 46,14"
15h 15m 46s	102° 18' 39,68"	52° 23' 06,62"	18° 58' 19,81"
16h 15m 46s	117° 21' 07,52"	52° 25' 30,54"	18° 58' 53,45"
15h 15m 46s	132° 23' 35,37"	52° 27' 54,47"	18° 59' 27,06"

Las expresiones de las mismas magnitudes basadas en esto para el tiempo indefinido son **15h 45' 46" + 3600" * t**

$$x = +0,6016159 + 0,4809864 * t + 0,0000105 * t^2 - 0,0000057 * t^3$$

$$y = +0,7174088 + 0,1728645 * t + 0,0001399 * t^2 - 0,0000020 * t^3$$

$$l = 0,5646939 + 0,0000270 * t - 0,0000098 * t^2$$

$$i = +0,004622746$$

$$\mu' = 109° 49' 53,60'' + 15° 02' 27,84'' * t$$

$$a = 52° 24' 18,58'' + 0° 02' 23,92'' * t$$

$$d = 18^{\circ} 58' 36,63'' + 0^{\circ} 00' 33,64'' * t \dots\dots\dots (100)$$

Uno puede explorar (estudiar) dos usos de la solución a la ecuación (94). El **primero** se basa en la asunción de los valores de las derivadas (valores diferenciales) de $x - \xi$, $y - \eta$, $l - i * \zeta$, correspondientes a cada uno de los tiempos τ que se van conociendo paulatinamente, en lugar de a' , b' , c' , dando así cada aproximación posterior al instante de un contacto de los limbos tomando los valores de a , b , c ; a' , b' , c' , tomándose como base. El **segundo** comienza con todas las aproximaciones de un valor de τ y por lo tanto los valores de a , b , c , pertenecientes a él, pero exige que con cada (valor) subsiguiente las derivadas (valores diferenciales) de los valores de a , b , c , pertenecientes a las anteriores, sean distintas de las τ que le pertenecen y se toman en cuenta como se toman en cuenta a' , b' , c' .

El **primer método** requiere que para cada uno de los instantes τ se calculen las siguientes cantidades, a partir de las cuales se empieza a conocer el siguiente:

- a) los valores de x , y , l , que se obtienen por las fórmulas de interpolación o sus desarrollos (100);
- b) los valores de ξ , η , $i * \zeta$, a cuyas expresiones (7) se les puede dar una forma adecuada para el cálculo (logarítmico);
- c) finalmente los valores de dx / dt , dy / dt , dl / dt , que resultan de la diferenciación de los desarrollos (100).
- d) los valores de $d\xi / dt$, $d\eta / dt$, $d(i * \zeta) / dt$, para los cuales se utilizan las fórmulas (§ 19):

$$d\xi / dt = \rho * \cos \phi' * \cos (\mu' - a + \omega) * (d(\mu' - a) / d\tau)$$

$$d\eta / dt = \xi * \sin d * (d(\mu' - a) / d\tau) - \zeta * (dd / d\tau)$$

$$d(i * \zeta) / dt = -i * \xi * \cos d * (d(\mu' - a) / d\tau) + \\ + i * \eta * (dd / d\tau) + \zeta * (di / d\tau)$$

(derivadas) que se aplican.

Inicialmente, cuando se supone que τ corresponde aproximadamente al (instante) del eclipse medio, sería innecesario tener en cuenta esa parte del cociente diferencial de η que depende del cambio en d , así como la cantidad $i * \zeta$ y el cociente diferencial de $l - i * \zeta$, estas pequeñas cantidades son insignificantes en comparación con los errores en la suposición de cambios proporcionales al tiempo en $x - \xi$ e $y - \eta$.

Por lo tanto, la primera aproximación a los instantes del contacto con los limbos (de ambos astros, Luna y Sol) se puede encontrar mediante cálculos no muy precisos utilizando las siguientes fórmulas abreviadas:

$$m * \sin M = x - \xi$$

$$m * \cos M = y - \eta$$

$$n * \sin N = x' - \rho * \cos \phi' * \cos (\mu' - a + \omega) * (d(\mu' - a) / d\tau)$$

$$n * \cos N = y' - \rho * \cos \phi' * \sin (\mu' - a + \omega) * (d(\mu' - a) / d\tau) * \sin d$$

$$\sin \psi = m * \sin (M - N) / l$$

$$t = -m * \cos (M - N) / n \pm l * \cos \psi / n \dots \dots \dots (101)$$

donde x, y, μ', d deben tomarse como correspondientes al instante τ , y x' e y' denotan los coeficientes de τ en las expresiones (100) de x e y . Este cálculo fácil solo dará las horas en que los limbos se

tocaron con certeza hasta unos pocos minutos, pero si solo se desea conocerlos para facilitar la observación del eclipse, entonces quizás incluso un error de este tamaño no sea considerado como significativo, y entonces no habría razón para buscar una mayor aproximación. El valor de p que determina el lugar donde el limbo de la Luna toca el limbo del Sol es, según la fórmula (99), para el comienzo $= N + 180^\circ - \psi$, para el final $= N + \psi$.

Si la determinación de las horas del eclipse debe llevarse a cabo de acuerdo con los elementos del cálculo, generalmente se obtiene la convergencia más rápida de las aproximaciones sucesivas que conducen a ellos utilizando a' , b' , c' para cada tiempo inicial una nueva aproximación totalmente determinada; pero si se desprecian las pequeñas variaciones de d y de $l - i * \zeta$, el error así cometido al suponer el movimiento relativo del punto dado sobre la Tierra y en los astros, expresa su influencia sólo durante el intervalo entre τ y el verdadero instante del contacto de los limbos, es decir, durante el tiempo más corto y por lo tanto más pequeño, más cercana es la aproximación de τ a este instante.

Por lo tanto, la convergencia de las aproximaciones no se ve significativamente reducida por estos descuidos. Si se abrevia así el cálculo, éste consiste en la aplicación repetida de las fórmulas (101); con la única diferencia de que en la segunda y siguientes aplicaciones, en lugar de la l suficiente en la primera, se utiliza $l - i * \zeta$.

§ 35.

Para el ejemplo de lo anterior elijo la determinación del comienzo y fin del eclipse solar el **15 de mayo de 1836** para el **Observatorio de Königsberg**, (en coordenadas) $\omega = 18^\circ 09' 45''$, $\phi = 54^\circ 42' 50,5$, y si

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

se tiene en cuenta $(1 - e^2)^{0,5} = 0,996674461$, $\rho = 0,997790351$,
(resulta) $\phi' = 54^\circ 32' 01,83''$.

Para obtener la **primera aproximación**, parto con $\tau = 0$, cuyo tiempo
= $15^h 45' 46''$ (correspondiente) al primer meridiano (de París), es el
mismo para el que se cumplen las partes de las expresiones (100)
independientes de t . Para ese instante tenemos

$$\begin{array}{lll} x = 0,6016 & \xi = 0,5607 & m * \sin M = +0,0409 \\ y = 0,7174 & \eta = 0,7216 & m * \cos M = -0,0042 \end{array}$$

$$M = 95^\circ 51,8' \quad m = 0,041114972$$

$$\begin{array}{lll} x' = +0,4810 & d\xi / d\tau = +0,0377 & n * \sin N = +0,4433 \\ y' = +0,1729 & d\eta / d\tau = +0,0477 & n * \cos N = +0,1252 \end{array}$$

$$N = 74^\circ 13,8' \quad n = 0,460648859$$

y, dado que $l = 0,5647$

$$\begin{array}{l} \psi = 1^\circ 32,3' \\ t = -0,0830 \pm 1,2254 \end{array}$$

o

$$t = -1,3084 \quad \text{y} \quad t = +1,1424$$

La **segunda aproximación** asume diferentes valores de τ para el
comienzo y el final del eclipse, a saber, los valores de t recién
encontrados. Los dos nuevos valores que resulten serán los
instantes de inicio de la **tercera aproximación**, etc. Aquí daré los
detalles de estas dos aproximaciones tal como se encuentran
utilizando las expresiones completas de a' , b' , c' .

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

Aproximación: Variable:	II Comienzo	II Fin	III Comienzo	III Fin
τ	-1,308400	+1,142400	-1,370990	+1,091760
x	-0,027646	+1,151130	-0,057747	+1,126773
y	+0,490999	+0,914705	+0,480157	+0,905967
l	0,564642	0,564712	0,564639	0,564712

$x' = dx/d\tau$	+0,480930	+0,480988	+0,480900	+0,480989
$y' = dy/d\tau$	+0,173218	+0,172539	+0,173234	+0,172554
$l' = dl/d\tau$	+0,000053	+0,000005	+0,000054	+0,000006

$\mu' - a + \omega$	55° 57' 41,31"	92° 43' 34,10"	55° 01' 21,18"	91° 57' 59,34"
d	18° 57' 52,61"	18° 59' 15,06"	18° 57' 50,51"	18° 59' 13,36"
ξ	+0,479745	+0,578285	+0,474371	+0,578599
η	+0,663233	+0,777401	+0,660697	+0,774907
$i * \zeta$	+0,002638	+0,001102	+0,002672	+0,001135

$d\xi/d\tau$	+0,084845	-0,007299	+0,086892	-0,005520
$d\eta/d\tau$	+0,040727	+0,049223	+0,040267	+0,049247
$d(i * \zeta)/d\tau$	-0,000549	-0,000661	-0,000543	-0,000662

M	251° 15' 0,75"	76° 31' 16,23"	251° 15' 31,20"	76° 33' 13,92"
m	+0,535826761	+0,589070264	+0,561912121	+0,563623510
N	71° 30' 17,41"	75° 49' 26,00"	71° 21' 06,68"	75° 46' 07,57"
n	+0,417656842	+0,503529593	+0,415839557	+0,501582759
v	+4' 57,31"	+4' 32,81"	+4' 56,11"	+4' 34,70"
ψ	+14' 32,76"	+43' 47,26"	+5' 34,97"	+47' 10,35"
ψ'	+14' 34,02"	+43' 43,79"	+5' 35,448"	+47' 06,587"
t	-0,06259	-0,05064	-0,000129	-0,000094
$\tau + t$	-1,37099	+1,09176	-1,371119	+1,091666
$p = N + 180^\circ - \psi'$	251° 15' 43,4	76° 33' 09,8"	251° 15' 31,2"	76° 33' 14,2"
y				
$p = N + \psi'$				

La transformación de los tiempos derivados, de la **III Aproximación**, en horas, minutos y segundos, y su adición a **15^h 45' 46"** respectivamente al primer (meridiano de París), o al **16^h 58' 25"** del **meridiano de Königsberg**, da el comienzo del eclipse = **15^h 36' 8",97**, el final = **18^h 03' 55",00**.

La **II Aproximación** dio **0,47"** y **0,34"** más; el ángulo de posición un error por **+12,2"** y **-4,4"**. Es fácil notar que el cálculo se cierra con la **III Aproximación**.

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

Para ilustrar la insignificancia de la pérdida de convergencia en las aproximaciones, que resulta de despreciar el cambio de d en la derivada de η , y de la derivada de $l - i * \zeta$, pondré aquí la **II Aproximación** modificada. Sin considerar estas pequeñas cantidades, obtenemos:

Aproximación modificada: Variable:	II Comienzo	II Fin
$d\eta/d\tau$	+0,040820	+0.049262
N	71° 31' 00,99"	75° 49' 41,49"
n	0.417627319	0.503519970
ψ	15' 15,513"	43' 27,502"
t	-0,06268	-0,05059
$p = N + 180^\circ - \psi$	251° 15' 45,5"	76° 33' 09,0"
y		
$p = N + \psi$		

de lo que se desprende que la influencia en los descuidos, incluso en la **II Aproximación**, que siguen siendo valores erróneos de τ , respectivamente **3,8'** y **3,0'**, son tan pequeños que deben volverse bastante imperceptibles en la siguiente aproximación. Teniendo en cuenta los cambios en d y $l - i * \zeta$, poco o nada se gana en la rapidez en la convergencia de las aproximaciones, por lo que se pueden omitir y facilitar el cálculo de las derivadas (valores diferenciales), y el ángulo ψ' se puede prescindir por completo.

§ 36.

La segunda de las dos formas descritas (en el apartado § 36) de aplicar la solución a la ecuación (94) difiere de la buscada en que no depende de cada una de las aproximaciones al tiempo buscado: τ , τ_1 , τ_2 , ... al siguiente, sino desde el primero del mismo a todos los siguientes. Si los valores de $x - \xi$, $y - \eta$, $l - i * \zeta$ pertenecientes a estos tiempos se reemplazan por $x - \xi$, $x_1 - \xi_1$, $x_2 - \xi_2$, ... etc. se denotan los valores de a' , b' , c' , que se deben aplicar para obtener τ_2 .

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

$$(x_1 - x) / (\tau_1 - \tau) - (\xi_1 - \xi) / (\tau_1 - \tau),$$

$$(y_1 - y) / (\tau_1 - \tau) - (\eta_1 - \eta) / (\tau_1 - \tau),$$

$$(l_1 - l) / (\tau_1 - \tau) - (i_1 * \zeta_1 - i * \zeta) / (\tau_1 - \tau),$$

para obtener τ_3 :

$$(x_2 - x) / (\tau_2 - \tau) - (\xi_2 - \xi) / (\tau_2 - \tau),$$

$$(y_2 - y) / (\tau_2 - \tau) - (\eta_2 - \eta) / (\tau_2 - \tau),$$

$$(l_2 - l) / (\tau_2 - \tau) - (i_2 * \zeta_2 - i * \zeta) / (\tau_2 - \tau),$$

etc. Los valores de a , b , c siguen siendo los pertenecientes a τ .

Voy a poner aquí (seguido) las expresiones de estos cambios. Si las expansiones de x , y , l en potencias de tiempo (t) (100) son:

$$\alpha + \beta * t + \gamma * t^2 + \delta * t^3$$

entonces las partes de a' , b' , c' que se originan de estas magnitudes son:

$$\beta + 2 * \gamma * \tau + 3 * \delta * \tau^2 + (\gamma + 3 * \delta * \tau) * (\tau_1 - \tau) + \delta * (\tau_1 - \tau)^2$$

..... (102)

en qué los términos τ_2 , τ_3 , ... se deben escribir en lugar de τ_1 al pasar de τ a τ_3 , τ_4 , ... (a los que) se deberían llegar. Las partes que vienen de ξ , η , $i * \zeta$ son:

$$\rho * \cos \phi' * (\sin (\mu_1' - a_1 + \omega) - \sin (\mu' - a + \omega)) / (\tau_1 - \tau)$$

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

$$\begin{aligned} & \rho * \sin \phi' * (\cos d_1 - \cos d) / (\tau_1 - \tau) - \\ & - \rho * \cos \phi' * (\sin d_1 * \cos (\mu_1' - a_1 + \omega) - \\ & - \sin d * \cos (\mu' - a + \omega)) / (\tau_1 - \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho * \sin \phi' * (i * \sin d_1 - i * \sin d) / (\tau_1 - \tau) + \\ & + \rho * \cos \phi' * (i * \cos d_1 * \cos (\mu_1' - a_1 + \omega) - \\ & - i * \cos d * \cos (\mu' - a + \omega)) / (\tau_1 - \tau) \end{aligned}$$

Si uno escribe $d + u$ y $\mu' - a + v$ en lugar de d_1 y $\mu_1' - a_1$, y para abreviar U y V en lugar de

$$(2 * (\sin u) / 2) / (\tau_1 - \tau), (2 * (\sin v) / 2) / (\tau_1 - \tau),$$

si uno también desprecia el cambio, siempre insignificante en i , uno puede expresarlos de la siguiente manera:

$$\rho * \cos \phi' * \cos (\mu' - a + \omega + v / 2) * V$$

$$\begin{aligned} & \rho * \cos \phi' * \sin (\mu' - a + \omega + v / 2) * \sin (d + u / 2) * \\ & * ((\cos u) / 2) * V - \rho * (\sin \phi' * \sin (d + u / 2) + \\ & + \cos \phi' * \cos (d + u / 2) * \cos (\mu' - a + \omega + v / 2) * \\ & * (\cos v) / 2) * U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -i * \rho * \cos \phi' * \sin (\mu' - a + \omega + v / 2) * \cos (d + u / 2) * \\ & * ((\cos u) / 2) * V + i * \rho * (\sin \phi' * \cos (d + u / 2) - \\ & - \cos \phi' * \sin (d + u / 2) * \cos (\mu' - a + \omega + v / 2) * \\ & * (\cos v) / 2) * U \dots \dots \dots (103) \end{aligned}$$

o, luego con una no tanta precisión (podría quedar):

$$\rho * \cos \phi' * \cos (\mu' - a + \omega + v / 2) * V$$

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

$$\begin{aligned} & \rho * \cos \phi' * \sin (\mu' - a + \omega + v / 2) * \sin (d + u / 2) * V - \\ & - \rho * (\sin \phi' * \sin d + \cos \phi' * \cos d * \cos (\mu' - a + \omega + v / 2) * U \\ & - i * \rho * \cos \phi' * \sin (\mu' - a + \omega + v / 2) * \cos (d + u / 2) * V \\ & \dots \dots \dots (103*) \end{aligned}$$

Se puede suponer que tanto v como u son proporcionales al tiempo; es decir, si los cambios horarios de $\mu' - a$ y d se denotan por $\delta * (\mu' - a)$ y $\delta * d$, $v = (\tau_1 - \tau) * \delta * (\mu_1 - a)$, $u = (\tau_1 - \tau) * \delta * d$.

Suponiendo $\delta * (\mu' - a)$ y $\delta * d$ expresados en partes del radio, quedará entonces

$$\begin{aligned} V = & \delta * (\mu' - a) - \delta * (\mu' - a)^3 * (\tau_1 - \tau)^2 / 24 + \\ & + \delta * (\mu' - a)^5 * (\tau_1 - \tau)^4 / 1920 - \\ & - \delta * (\mu' - a)^7 * (\tau_1 - \tau)^6 / 153600 \dots \end{aligned}$$

(y) U simplemente se convierte en $= \delta * d$, ya que sólo el primer término de la misma expresión puede alcanzar una magnitud apreciable. Las cantidades (logaritmos) de V se pueden llevar a una tabla correspondiente suponiendo $\delta * (\mu' - a) = 15^\circ$ y considerando también su cambio por cada **segundo** de $\delta * (\mu' - a) - 15^\circ$, cuyo argumento es $\tau_1 - \tau$.

Este método requiere el cálculo de m y M únicamente para el instante t , no como en el anterior con su repetición para los tiempos τ_1, τ_2, \dots Por otro lado, se expresa el cálculo de a', b', c' , después de las expresiones de las fórmulas (102) y (103*), las últimas de las cuales no son tan simples como las expresiones de las derivadas (valores diferenciales). En los casos en que convergen tan rápidamente que su aplicación no debe repetirse más que la del primer método, tiene ventaja sobre el segundo; sin embargo, cuanto

más lejos esté el instante τ del tiempo deseado del contacto con los limbos (de la Luna y del Sol), más lenta será su convergencia.

Por ejemplo, si se desea calcular un eclipse de Sol con una precisión de una centésima de segundo, comenzando todas las aproximaciones sucesivas a partir de un valor de τ , que corresponde aproximadamente a la mitad del eclipse (eclipse máximo) y puede ser de hasta una hora y media o más (bien) sustraído de los instantes buscados, se convierte en la pérdida de la convergencia de las aproximaciones sucesivas, al menos superando la ventaja en la ejecución de cada una de ellas, que tiene el presente método sobre el anterior.

Por el contrario, si se quiere iniciar el cálculo del principio y el final de los dos valores de τ que se han conocido por primera aproximación, entonces esta ventaja coincidirá con una convergencia suficientemente rápida. Se busca entonces la **II Aproximación** según el método anterior, es decir, exactamente como se obtuvo por cálculo en el apartado **§ 35**, en el caso elegido como ejemplo; la siguiente (**III Aproximación**), sin embargo, deja m y M sin cambios, ya que se basa en los valores de a' , b' , c' , como resultan las fórmulas **(102)** y **(103*)**. - De esta forma se conocerán más fácilmente los dos tiempos que, según los elementos del cálculo, pertenecen a los contactos de los limbos. Si se desea conocer estos tiempos con certeza en unos pocos segundos, se contentará con una aplicación del presente método a cada uno de ellos, tomando τ como base para la primera aproximación, y para τ_1 , los dos de estos tiempos anteriores (iniciales).

§ 37.

El presente método se recomienda particularmente en el caso de la **ocultación de las estrellas fijas por la Luna**. En este caso l es

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

constante, es decir, el radio de la Luna expresado en partes del radio ecuatorial; i desaparece y a , d no son diferentes de la ascensión recta y declinación de la **estrella fija**, por lo que no cambian apreciablemente durante la duración del eclipse. De esta forma, las dos primeras de las expresiones de las fórmulas (103) se combinan en lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \rho * \cos \phi' * \cos (\mu' - a + \omega + \upsilon / 2) * V \\ & \rho * \cos \phi' * \sin (\mu' - a + \omega + \upsilon / 2) * \sin d * V \end{aligned}$$

y la tercera desaparece; υ significa sucesivamente que la hora sidérea expresada en partes de círculo correspondientes a $\tau_1 - \tau$, $\tau_2 - \tau$, ... y V pueden ser llevados a una tabla válida para todas las ocultaciones, la cual adjunto aquí. Las fórmulas (101) ahora están completas y, por lo tanto, no solo se pueden utilizar para la primera aproximación, sino también para todas las posteriores. Finalmente, la menor duración de las ocultaciones hará que sucesivas aproximaciones, a partir de un valor de τ alrededor de la mitad del fenómeno, converjan lo suficientemente rápido como para recomendar el uso exclusivo de este método, incluso si el objetivo del cálculo es lograr una precisión completa.

Si las **efemérides astronómicas**, también en relación con los **eclipses solares y las ocultaciones**, han de satisfacer las necesidades de los observadores, deben, durante un tiempo τ próximo a la mitad del fenómeno, mostrar los valores de las magnitudes indicadas

$$x, y, l; x', y'; \mu' - a; d$$

Si las horas del comienzo y el final, así como los lugares de los contactos entre los limbos del Sol o de la Luna, donde ambos ocurren, deben determinarse de tal manera que un observador en un lugar dado por (sus coordenadas) ϕ y ω sepa aproximadamente

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

cuándo y dónde ambos fenómenos tienen que ser observados, (según)

$$\xi, \eta, d\xi / d\tau, d\eta / d\tau$$

con los que se debe calcular y aplicar las fórmulas (101). Los instantes resultantes del **primer meridiano (de París)** del principio y fin (del eclipse) deben relacionarse con el meridiano del lugar dado, sumando la diferencia con el mediodía. —Si se desea una aproximación más cercana (precisa), se obtendrá fácilmente por el segundo método.

Tablas para V y v para las ocultaciones de las estrellas fijas.

$\tau_1 - \tau$	V	v
0,00	0,262516134	0° 0' 0"
0,01	0,262516134	0° 4' 30,7"
0,02	0,262516134	0° 9' 1,5"
0,03	0,262515530	0° 13' 32,3"
0,04	0,262514925	0° 18' 3"
0,05	0,262514321	0° 22' 33,7"
0,06	0,262513716	0° 27' 4,4"
0,07	0,262512507	0° 31' 35,2"
0,08	0,262511298	0° 36' 5,9"
0,09	0,262510089	0° 40' 36,7"
0,10	0,262508881	0° 45' 7,4"
0,11	0,262507067	0° 49' 38,1"
0,12	0,262505254	0° 54' 8,9"
0,13	0,262503441	0° 58' 39,6"
0,14	0,262501627	1° 3' 10,4"
0,15	0,262499210	1° 7' 41,1"
0,16	0,262496792	1° 12' 11,8"
0,17	0,262494374	1° 16' 42,6"
0,18	0,262491957	1° 21' 13,3"
0,19	0,262488935	1° 25' 44,1"
0,20	0,262485913	1° 30' 14,8"

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

0,21	0,262482891	1° 34' 45,5"
0,22	0,262479869	1° 39' 16,3"
0,23	0,262476242	1° 43' 47"
0,24	0,262472616	1° 48' 17,7"
0,25	0,262468990	1° 52' 48,5"
0,26	0,262465364	1° 57' 19,2"
0,27	0,262461133	2° 1' 50"
0,28	0,262456903	2° 6' 20,7"
0,29	0,262452673	2° 10' 51,4"
0,30	0,262448443	2° 15' 22,2"
0,31	0,262443608	2° 19' 52,9"
0,32	0,262438774	2° 24' 23,7"
0,33	0,262433940	2° 28' 54,4"
0,34	0,262429105	2° 33' 25,1"
0,35	0,262423667	2° 37' 55,9"
0,36	0,262418229	2° 42' 26,6"
0,37	0,262412791	2° 46' 57,4"
0,38	0,262407353	2° 51' 28,1"
0,39	0,262401311	2° 55' 58,8"
0,40	0,262395269	3° 0' 29,6"
0,41	0,262389227	3° 5' 0,3"
0,42	0,262383185	3° 9' 31,1"
0,43	0,262376540	3° 14' 1,8"
0,44	0,262370498	3° 18' 32,5"
0,45	0,262363249	3° 23' 3,3"
0,46	0,262356604	3° 27' 34"
0,47	0,262349959	3° 32' 4,8"
0,48	0,262342710	3° 36' 35,5"
0,49	0,262335461	3° 41' 6,2"
0,50	0,262327608	3° 45' 37"

$\tau_1 - \tau$	v	υ
0.50	0.262327608	3° 45' 37"
0.51	0.262319756	3° 50' 7.7"
0.52	0.262312508	3° 54' 38.4"
0.53	0.262304656	3° 59' 9.2"
0.54	0.262296201	4° 3' 39.9"
0.55	0.262288349	4° 8' 10.7"
0.56	0.262279894	4° 12' 41.4"
0.57	0.262271440	4° 17' 12.1"
0.58	0.262262381	4° 21' 42.9"

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

0.59	0.262253927	4° 26' 13.6"
0.60	0.262244869	4° 30' 44.4"
0.61	0.262235812	4° 35' 15.1"
0.62	0.262226755	4° 39' 45.8"
0.63	0.262217094	4° 44' 16.6"
0.64	0.262207434	4° 48' 47.3"
0.65	0.262197774	4° 53' 18.1"
0.66	0.262188114	4° 57' 48.8"
0.67	0.262177851	5° 2' 19.5"
0.68	0.262167589	5° 6' 50.3"
0.69	0.262157327	5° 11' 21"
0.70	0.262147065	5° 15' 51.7"
0.71	0.262136200	5° 20' 22.5"
0.72	0.262125336	5° 24' 53.2"
0.73	0.262114472	5° 29' 24"
0.74	0.262103608	5° 33' 54.7"
0.75	0.262092142	5° 38' 25.4"
0.76	0.262081279	5° 42' 56.2"
0.77	0.262069814	5° 47' 26.9"
0.78	0.262057745	5° 51' 57.7"
0.79	0.262046281	5° 56' 28.4"
0.80	0.262034213	6° 0' 59.1"
0.81	0.262022146	6° 5' 29.9"
0.82	0.262009477	6° 10' 0.6"
0.83	0.261997411	6° 14' 31.4"
0.84	0.261984743	6° 19' 2.1"
0.85	0.261972075	6° 23' 32.8"
0.86	0.261959408	6° 28' 3.6"
0.87	0.261946138	6° 32' 34.3"
0.88	0.261932869	6° 37' 5.1"
0.89	0.261919601	6° 41' 35.8"
0.90	0.261906333	6° 46' 6.5"
0.91	0.261892463	6° 50' 37.3"
0.92	0.261878594	6° 55' 8"
0.93	0.261864725	6° 59' 38.8"
0.94	0.261850857	7° 4' 9.5"
0.95	0.261836387	7° 8' 40.2"
0.96	0.261821918	7° 13' 11"
0.97	0.261807450	7° 17' 41.7"
0.98	0.261792982	7° 22' 12.5"
0.99	0.261778515	7° 26' 43.2"
1.00	0.261763446	7° 31' 13.9"

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

$\tau_1 - \tau$	V	ν
1.00	0.261763446	7° 31' 13.9"
1.01	0.261748379	7° 35' 44.7"
1.02	0.261732709	7° 40' 15.4"
1.03	0.261717643	7° 44' 46.1"
1.04	0.261701975	7° 49' 16.9"
1.05	0.261686308	7° 53' 47.6"
1.06	0.261670040	7° 58' 18.4"
1.07	0.261654375	8° 2' 49.1"
1.08	0.261638710	8° 7' 19.8"
1.09	0.261621843	8° 11' 50.6"
1.10	0.261605578	8° 16' 21.3"
1.11	0.261588712	8° 20' 52.1"
1.12	0.261571848	8° 25' 22.8"
1.13	0.261554984	8° 29' 53.5"
1.14	0.261538121	8° 34' 24.3"
1.15	0.261520658	8° 38' 55"
1.16	0.261503195	8° 43' 25.8"
1.17	0.261485734	8° 47' 56.5"
1.18	0.261468274	8° 52' 27.2"
1.19	0.261450815	8° 56' 58"
1.20	0.261432755	9° 1' 28.7"
1.21	0.261414697	9° 5' 59.5"
1.22	0.261396038	9° 10' 30.2"
1.23	0.261377982	9° 15' 0.9"
1.24	0.261359325	9° 19' 31.7"
1.25	0.261340670	9° 24' 2.4"
1.26	0.261321414	9° 28' 33.2"
1.27	0.261302762	9° 33' 3.9"
1.28	0.261283509	9° 37' 34.6"
1.29	0.261264258	9° 42' 5.4"
1.30	0.261245008	9° 46' 36.1"
1.31	0.261225158	9° 51' 6.8"
1.32	0.261205309	9° 55' 37.6"
1.33	0.261185462	10° 0' 8.3"
1.34	0.261165617	10° 4' 39.1"
1.35	0.261145171	10° 9' 9.8"
1.36	0.261124728	10° 13' 40.5"
1.37	0.261104286	10° 18' 11.3"
1.38	0.261083845	10° 22' 52"

Tercera sección. Cálculo del eclipse en cualquier lugar dado sobre la Tierra

1.39	0.261063406	10° 27' 12.8"
1.40	0.261042368	10° 31' 43.5"
1.41	0.261021331	10° 36' 14.2"
1.42	0.260999695	10° 40' 45"
1.43	0.260978662	10° 45' 15.7"
1.44	0.260957029	10° 49' 46.5"
1.45	0.260935399	10° 54' 17.2"
1.46	0.260913770	10° 58' 47.9"
1.47	0.260891542	11° 3' 18.7"
1.48	0.260869316	11° 7' 49.4"
1.49	0.260847092	11° 12' 20.2"
1.50	0.260824870	11° 16' 50.9"

Aplicación de las Observaciones de los Eclipses.

§ 38.

Las **observaciones de los eclipses** proporcionan resultados tan importantes para la **astronomía** que el desarrollo de las relaciones entre los dos ha sido objeto de mucho esfuerzo, lo que, sin embargo, no agota completamente el tema como para que la presente sección pueda considerarse superflua. (Los eclipses) son un medio muy valioso para determinar la diferencia con el mediodía de los lugares donde ocurren; un medio que encuentra la aplicación más frecuente, (con) menos aparatos e instalaciones preparatorias que requieran.

Determinan, en los casos apropiados, la ubicación relativa del astro que eclipsa (la Luna) con una certeza que de otro modo sería difícil de alcanzar, y finalmente han conducido a la determinación de la magnitud de la **paralaje del Sol**. —Aquí no me ocuparé particularmente de esta última en la aplicación de las observaciones de los eclipses; pero cualquiera que sea la aplicación que se contemple, su teoría siempre debe proceder de la ecuación que relaciona la conexión de los elementos de un eclipse, y los ω , ϕ , requeridos para determinar un punto (coordenada) sobre la Tierra, con los instantes de los contacto del eclipsado que ocurren en ese punto (comienzo y fin), se expresa entonces de la misma ecuación:

$$(l - i * \zeta)^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \dots \dots \dots (104)$$

(sobre la cual) he hecho la base de todas las investigaciones realizadas en este trabajo.

Deduciré de esta ecuación la expresión de la diferencia con el mediodía (ω) de un lugar donde se ha observado y (también) se

conoce la hora del contacto de los limbos (de la Luna con el del Sol). Así que este instante está dado, y debe suponerse que se conoce en términos de la hora media y la hora sidérea; también se da la altura polar (ϕ) del sitio de observación. Todos los elementos del eclipse x , y , l , i , a , d , supongo, (dados) para los instantes del primer meridiano (de París), que progresan de hora en hora de hora media, calculados de la misma manera a partir de las indicaciones de las **tablas o efemérides**, la cuales están en el apartado § 4 para el eclipse solar del **15 de mayo de 1836**; también supondré los valores de estos últimos cuatro elementos, que son inmutables en el caso de las **ocultaciones de las estrellas fijas**, aunque experimentan cambios muy lentos en todos los demás casos, generalmente conocidos para el período de observación.

Sin embargo, para no descuidar los errores en los datos en los que se basa el cálculo de x , y , l , agregaré los cambios indefinidos Δx , Δy , Δl a esas cantidades y examinaré su influencia en la expresión de ω . Los cambios indefinidos similares, relacionados con i , a , d , no se incluirán en el cálculo, porque su influencia (siempre insignificante) no se puede determinar a partir de las observaciones de un eclipse. Pero tendré en cuenta la influencia de un pequeño cambio indefinido en el cuadrado de la excentricidad de los meridianos terrestres, contenido en los valores de ξ , η , ζ .

Si la hora media de la observación se denota por t , y la hora del primer meridiano que es igual a él se denota por $t - \omega$, y t significa una hora arbitraria, pero que se aproxima, al mismo meridiano en la medida en que x e y experimentan cambios durante la hora intermedia $t - \omega - \tau$, que se puede suponer que son aproximadamente proporcionales a ellos, entonces los valores de estas cantidades correspondientes a la hora de la observación pueden representarse de la forma:

$$x_0 + x' * (t - \omega - \tau) + \Delta x, \quad y_0 + y' * (t - \omega - \tau) + \Delta y$$

en los que x_0 , y_0 pertenecen al instante τ y las (variables) dependientes, es decir, las desconocidas en el interín, x' , y' , según la suposición, son aproximadamente conocidas.

De acuerdo con estas suposiciones y explicaciones, la ecuación (104) toma la forma adecuada para determinar directamente a ω . Es decir, ella es:

$$\begin{aligned} & (1 - i * \zeta + \Delta l - \Delta e^2 * i * (dz / de^2))^2 = \\ & = (x_0 - \xi + x' * (t - \omega - \tau) + \Delta x - \Delta e^2 * (d\xi / de^2))^2 + \\ & + (y_0 - \eta + y' * (t - \omega - \tau) + \Delta y - \Delta e^2 * (d\eta / de^2))^2 \end{aligned}$$

pero se puede utilizar la idea del producto, que desaparece en el caso de las **ocultaciones de las estrellas fijas** y se vuelve insignificante en todos los demás casos, sin por ello cometer un grave error, es decir, en lugar de esta ecuación, (se puede utilizar):

$$\begin{aligned} & (1 - i * \zeta + \Delta l)^2 = \\ & = (x_0 - \xi + x' * (t - \omega - \tau) + \Delta x - \Delta e^2 * (d\xi / de^2))^2 + \\ & + (y_0 - \eta + y' * (t - \omega - \tau) + \Delta y - \Delta e^2 * (d\eta / de^2))^2 \dots \text{(105)} \end{aligned}$$

Su resolución conduce desde los valores asumidos y aproximadamente conocidos de x' e y' a una primera determinación de $t - \omega - \tau$; esto genera valores mejorados de x' e y' , y por lo tanto una segunda determinación, etc. Sin embargo, la convergencia de estas aproximaciones sucesivas es tan grande que, si su aplicación está debidamente ordenada, es necesario ir más allá de la primera (aproximación).

Uno determina m , M , n , N de acuerdo con las fórmulas

$$m * \sin M = x - \xi$$

$$m * \cos M = y - \eta$$

$$n * \sin N = x'$$

$$n * \cos N = y'$$

Para que se pueda escribir la ecuación

$$\begin{aligned} (1 - i * \zeta + \Delta I)^2 = & \\ = (n * (t - \omega - \tau) + m * \cos (M - N) + & \\ + \Delta x * \sin N + \Delta y * \sin N - & \\ - \Delta e^2 * (d(\xi * \sin N + \eta * \cos N) / de^2))^2 + & \\ + (m * \sin (M - N) + & \\ + \Delta x * \cos N + \Delta y * \sin N - & \\ - \Delta e^2 * (d(\xi * \sin N - \eta * \cos N) / de^2))^2 & \end{aligned}$$

o si se quiere abreviar

$$\begin{aligned} \lambda = \Delta x * \sin N + \Delta y * \cos N - & \\ - \Delta e^2 * (d(\xi * \sin N + \eta * \cos N) / de^2) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda' = -\Delta x * \cos N + \Delta y * \sin N - & \\ - \Delta e^2 * (d(\xi * \cos N + \eta * \sin N) / de^2) & \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} (1 - i * \zeta + \Delta I)^2 = & \\ = (n * (t - \omega - \tau) + \lambda + m * \cos (M - N))^2 + & \\ + (m * \sin (M - N) - \lambda')^2 \dots \dots \dots (106) & \end{aligned}$$

Cuando Δl y λ' son muy pequeños en comparación con $l - i * \zeta$ y ψ se toma por medio de

$$\sin \psi = m * \sin (M - N) / L$$

determina dónde L , para abreviar, se escribe para $l - i * \zeta$, y aquí continúa

$$t - \omega - \tau = -m * \cos (M - N) / n - L * \cos \psi / n - \Delta L / (\cos \psi * n) - \lambda' * \tan \psi / n - \lambda / n$$

o

$$\omega = t - \tau + m * \cos (M - N) / n + L * \cos \psi / n + \lambda / n + \lambda' * \tan \psi / n + \Delta L / (\cos \psi * n) \dots \dots \dots (107)$$

para cualquier valor, excepto para uno muy pequeño o que desaparece con $\sin \psi$, puede ser aplicada

$$-\omega = t - \tau + m * \sin (M - N + \psi) / (n * \sin \psi) + \lambda / n + \lambda' * \tan \psi / n + \Delta L / (\cos \psi * n) \dots \dots \dots (107^*)$$

Estas fórmulas determinan ω en fracción de la hora expresada; para obtener su valor expresado de la forma habitual, también se deben expresar t y τ de este modo, y multiplicar los términos restantes por **3600**.

§ 39.

Estas expresiones de ω son ambiguas, ya que ψ puede ser tanto un ángulo agudo como un ángulo obtuso, estando determinado únicamente por su seno. Por lo tanto, es necesario examinar cómo

se va a decidir esta ambigüedad en cada caso. —Según que el contacto del limbo (lunar con el solar) pertenezca al principio o al final del eclipse, la suma de los dos cuadrados del lado derecho del signo igual, menos el cuadrado del lado izquierdo (105) en el instante siguiente, debe ser negativo o positivo, o que en relación con el tiempo la derivada de esta diferencia adquirida debe ser negativa o positiva. Pero como la derivada (cociente diferencial) del último cuadrado, que se anula en el caso de las ocultaciones de las estrellas fijas, es muy pequeño en todos los demás casos, por lo tanto, puede cambiar el signo de la derivada de la expresión completa solo en los casos en que la derivada de la suma de los dos primeros cuadrados también es muy pequeña, pero luego las magnitudes pequeñas registradas e indefinidas hacen que su signo sea arbitrario, y estos casos también son inútiles para determinar ω , uno puede considerar un pequeño descuido como insignificante y asumir como un distintivo signo del principio o final en que derivada de (la siguiente expresión) sea negativa o positiva

$$(x_0 - \xi + x' * (t - \omega - \tau))^2 + (y_0 - \eta + y' * (t - \omega - \tau))^2$$

La mitad de su derivada tiene la expresión:

$$(x_0 - \xi + x' * (t - \omega - \tau)) * (x' - (d\xi / dt)) + \\ + (y_0 - \eta + y' * (t - \omega - \tau)) * (y' - (d\eta / dt))$$

que, sustituyendo la expresión (107) de $t - \omega - \tau$, se transforma en

$$L * (\sin(\psi - N) * (x' - (d\xi / dt)) - \cos(\psi - N) * (y' - (d\eta / dt)))$$

Si uno escribe en ella $n * \sin N$ y $n * \cos N$ en lugar de x' e y' , entonces se torna como

$$-L * ((n - \sin N * (d\xi / dt) - \cos N * (d\eta / dt)) * \cos \psi +$$

$$+ (\cos N * (d\xi / dt) - \sin N * (d\eta / dt)) * \sin \psi$$

y se determina n' , N' por las fórmulas

$$\begin{aligned} n' * \cos N' &= n - \sin N * (d\xi / dt) - \cos N * (d\eta / dt) \\ n' * \sin N' &= \cos N * (d\xi / dt) - \sin N * (d\eta / dt) \end{aligned}$$

en el que n' se toma positivamente, se vuelve finito:

$$-L * n' * \cos (\psi - N')$$

Continúa aquí que si $L = l - i * \zeta$ es positivo, es decir, el contacto de los limbos es exterior o interior en un **eclipse anular**, debe tomarse ψ para el comienzo de tal manera que $\cos (\psi - N')$ sea positivo, para el final de modo que el mismo coseno se vuelva negativo; o que ψ debe tomarse entre $N' - 90^\circ$ y $N' + 90^\circ$ para el principio, y entre $N' - 90^\circ$ y $N' + 270^\circ$ para el final. En el caso de un valor negativo de $l - i * \zeta$, que ocurre sólo en los **eclipses totales**, se debe tomar ψ como el comienzo entre los dos últimos ($N' - 90^\circ$ y $N' + 270^\circ$) y como el final entre los dos primeros límites ($N' - 90^\circ$ y $N' + 90^\circ$).

Las fórmulas de las que resulta N' pueden desarrollarse aún más utilizando sus expresiones en lugar de las derivadas de ξ y η :

$$\begin{aligned} d\xi / dt &= \rho * \cos \phi' * \cos (\mu - a) * (d(\mu - a) / dt) \\ d\eta / dt &= \rho * \cos \phi' * \sin (\mu - a) * \sin d * (d(\mu - a) / dt) - \zeta * (dd / dt) \end{aligned}$$

estableciendo esto nos da

$$\begin{aligned} n' * \cos N' &= n - \rho * \cos \phi' * (\cos (\mu - a) * \sin N + \\ &\quad + \sin (\mu - a) * \cos N * \sin d) * (d(\mu - a) / dt) + \\ &\quad + \zeta * \cos N * (dd / dt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n' * \sin N' = & \rho * \cos \phi' * (\cos (\mu - a) * \cos N - \\
 & - \sin (\mu - a) * \sin N * \sin d) * (d(\mu - a) / dt) + \\
 & + \zeta * \sin N * (dd / dt) \dots \dots \dots (108)
 \end{aligned}$$

donde, sin embargo, los términos dependientes de dd / dt sólo pueden tomarse en consideración en casos raros y son inútiles para la determinación de ω .

Por lo general, uno no tendrá ninguna razón para buscar la decisión sobre la ambigüedad de las fórmulas (107), de esta manera, sabiendo lo suficientemente bien como para no permanecer en la duda sobre la elección a realizar.

§ 40.

Todavía tengo que decir algo sobre las suposiciones hechas en el apartado § 38. Se supone que se dan tanto la hora media como la hora sidérea del contacto del limbo (lunar con el solar) y sus valores asociados de l, i, a, d , mientras que al menos una de las dos expresiones de tiempo y estos valores, no se pueden encontrar sin conocimiento de la diferencia con el mediodía, asumiendo así este entendimiento, y por lo tanto la determinación de la diferencia con el mediodía dada en el apartado § 38 no es directa. Es cierto que esto no es un obstáculo importante para la aplicación, ya que la diferencia con el mediodía no será tan fácil de dudar de que su conocimiento no sería suficiente para dar los valores de las cantidades supuestas que cambian lentamente (y) pertenecientes al instante de observación con la precisión requerida; pero en relación con la teoría misma, será de algún interés mostrar cómo debe completarse para que pueda determinar directamente la diferencia con el mediodía.

Por observación directa se puede determinar la hora sidérea o la hora solar verdadera, pero la hora media sólo se puede calcular a partir de uno u otro, siempre que se conozca la diferencia con el mediodía. Primero supondré que la hora sidérea está determinada. Así se da el valor de μ contenido en ξ, η, ζ . Los valores de l, i, a, d , para el instante de observación son:

$$l_0 + l' * (t - \omega - \tau), i_0 + i' * (t - \omega - \tau), \\ a_0 + a' * (t - \omega - \tau), d_0 + d' * (t - \omega - \tau)$$

en donde las expresiones l_0, i_0, a_0, d_0 pertenecen al instante τ , y las cantidades que se les suman significan sus cambios entre este y el instante de observación. Si uno entiende por ξ, η, ζ los valores de estas cantidades, que resultan de la suposición de a, d para el tiempo τ , la ecuación completa, por cuya solución se determina $t - \omega - \tau$, se convierte en:

$$(l_0 - i_0 * \zeta + (l' - i' * \zeta + i * a' * (d\zeta / d\mu) - \\ - i * d' * (d\zeta / dd)) * (t - \omega - \tau) + \Delta l)^2 = \\ = (x_0 - \xi + (x' + a' * (d\xi / d\mu)) * (t - \omega - \tau) + \\ + \Delta x - \Delta e^2 * (d\xi / de^2))^2 + \\ + (y_0 - \eta + (y' + a' * (d\eta / d\mu) - d' * (d\eta / dd)) * (t - \omega - \tau) + \\ + \Delta y - \Delta e^2 * (d\eta / de^2))^2 \dots \dots \dots (109)$$

y $t - \omega - \tau$ se encuentra a partir de esto, según las fórmulas desarrolladas en el apartado § 33; pero la cantidad contenida en el primer término, que depende del tiempo, es siempre tan pequeña que nunca hay un caso en el que no se pueda suponer que se conoce con suficiente precisión, de modo que la solución vuelve a las fórmulas más simples del apartado § 38. Dado que la hora sidérea del primer meridiano (de París) = $\mu - \omega$, está $\mu - \omega - \mu_0$ más allá del

hora media τ , cuando la hora sidérea correspondiente a este se denota por μ_0 , o sea la incógnita de la ecuación

$$t - \omega - \tau = (\mu - \omega - \mu_0) / h$$

donde, asumiendo que $\mu - \omega - \mu_0$ se expresa en segundos, h denota el número de segundos siderales contenidos en una hora media, por lo tanto $h = 3609,85647''$. Si la solución de la ecuación da $t - \omega - \tau = U$, entonces

$$\omega = \mu - \mu_0 - h * U$$

(que es) la expresión deseada de la diferencia con el mediodía, completamente liberada de las suposiciones pensadas (ya establecida). -En el caso de ocultaciones de estrellas fijas, i, l', i', a', d' ; por lo cual, suponiendo que se observen según la hora sidérea, las fórmulas (107) determinan directamente a ω si $\mu - \mu_0$ se sustituye por $t - \tau$, si se omite i y los términos que siguen a $\mu - \mu_0$ se multiplican por h .

Si el instante observado del contacto (entre el limbo lunar y solar) está en hora solar verdadera, y se denota por t' , así como la ascensión recta del Sol en la hora τ es (denotada) por α_0 , y en el instante de observación por $\alpha_0 + \alpha' * (t - \omega - \tau)$, también lo es

$$\mu = t' + \alpha_0 + \alpha' * (t - \omega - \tau)$$

y

$$\mu - a = t' + \alpha_0 - a_0 + (\alpha' - a') * (t - \omega - \tau)$$

Se obtiene entonces la ecuación completa correspondiente a este supuesto, escribiendo $a' - \alpha'$ en lugar de a' en las (fórmulas)

anteriores (109), pero entendiendo a ξ , η , ζ como los valores de estas cantidades, correspondientes a $\mu = t' + \alpha_0$, así como los valores de a , d pertenecen a τ . Como la hora verdadera del **primer meridiano (de París)** es $= t' - \omega$, está más allá de la hora media τ , cuando la hora verdadera correspondiente a este (instante) se denota por τ' , $t' - \omega - \tau'$, o la cantidad desconocida de la ecuación es

$$t - \omega - \tau = (t' - \omega - \tau') / h$$

donde, suponiendo que $t' - \omega - \tau'$ se expresa en segundos, h significa ahora el número de segundos verdaderos que contiene una hora media. Así que se tiene

$$\omega = t' - \tau' - h * U$$

En el caso de los **eclipses**, α' y a' son apenas diferentes, lo que hace que las partes de las ecuaciones (109) que contienen a' sean irrelevantes bajo la presente suposición. En el caso de **ocultaciones de estrellas fijas**, las fórmulas (107) son completas si

$$\begin{aligned} n * \sin N &= x' - \alpha' * (d\xi / d\mu) \\ n * \cos N &= y' - \alpha' * (d\eta / d\mu) \end{aligned}$$

supongamos que los términos que siguen a $t - \tau$ se multiplican por h , se omite i y se escribe $t' - \tau'$ en lugar de $t - \tau$.

Aunque probablemente nunca habrá ocasión de considerar la terminación de la ecuación (105) aplicada en este apartado, la observación hizo que no sea necesario verificar la hora verdadera o la hora sidérea dada de una observación antes de su cálculo, en hora media, para ahorrarle al calculador (matemático) este esfuerzo, aunque no (sea) muy considerable.

Si una efeméride da las posiciones de los astros para tiempos prolongados, los cálculos de los valores de x , y , l , etc., se hacen más fáciles para los tiempos que están separados por una hora del tiempo real que para (cada) media hora; (y) continua que las observaciones realizadas del eclipse, de las que esos valores son sus elementos, no deben pues reducirse a ellas por ninguna otra especie de indicación de tiempo.

§ 41.

Aunque x' e y' cambian tan poco durante la duración de un eclipse que las fórmulas (107) conducen casi a la verdad, incluso si $t - \omega - \tau$ son unas pocas horas y en lugar de x' e y' los valores de las derivadas son asumidos por x e y en el tiempo τ ; aunque se obtiene una convergencia muy rápida en aproximaciones repetidas (iteraciones) de estas fórmulas, si su primera aproximación también parte de un valor de τ tan alejado del tiempo de observación, pero la segunda (aproximación) para x' e y' las derivadas (valores diferenciales) de x e y entre τ y el valor de $t - \omega$ resultante de la primera (aproximación), etc., entonces, sin embargo, es ventajoso disponer el cálculo de tal manera que $t - \omega - \tau$ no sea muy grande.

Cuanto más pequeño sea este intervalo, con mayor precisión se podrá encontrar por cálculo; esta pequeñez también aumenta la convergencia, pero siempre será lo suficientemente grande como para aproximarse a la verdad por el cálculo, a partir del conocimiento aproximado del valor de $t - \omega - \tau$, que estará presente en todo caso, tan cerca en que en la ocasión no se dispone de un segundo.

Habitualmente habría que calcular varias observaciones de un eclipse, tanto de su inicio como de su final, así como las realizadas en diferentes lugares, y así, si se quiere basar todas ellas en una

suposición de τ , se verá obligado a eliminar esto aún más en algunos de los instantes de observación. Por otro lado, si uno quiere trasladar a τ lo más cerca posible de cada tiempo de observación, debe darle un valor diferente para cada observación, a saber, el valor $t - \omega$, agregando ω como puede haberse conocido antes de la observación. Voy a pasar por ambos tipos de procedimientos aquí.

I. Si se quiere basar el cálculo de todas las observaciones en un valor de t , se supondrá que de los intervalos de tiempo que suceden de hora en hora para los que se han calculado los elementos del eclipse, que se acerca más a la mitad de todos instantes de observación, como τ , o, si estos elementos solo se buscan después de que se conocen las observaciones, las horas para los que se calculan se contarán hacia adelante y hacia atrás desde aproximadamente la mitad de los tiempos de observación. Si se calcula entonces n y N de hora en hora, según las fórmulas (del apartado) § 30:

$\tau = -3$	$n * \sin N = (x_0 - x_{-3})$	$n * \cos N = (y_0 - y_{-3}) / 3$
$\tau = -2$	$n * \sin N = (x_0 - x_{-2})$	$n * \cos N = (y_0 - y_{-2}) / 2$
$\tau = -1$	$n * \sin N = (x_0 - x_{-1})$	$n * \cos N = (y_0 - y_{-1})$
$\tau = 0$	$n * \sin N = b - d / 6$	$n * \cos N = b - d / 6$
$\tau = +1$	$n * \sin N = (x_{+1} - x_0)$	$n * \cos N = (y_{+1} - y_0)$
$\tau = +2$	$n * \sin N = (x_{+2} - x_0)$	$n * \cos N = (y_{+2} - y_0) / 2$
$\tau = +3$	$n * \sin N = (x_{+3} - x_0)$	$n * \cos N = (y_{+3} - y_0) / 3$

a partir de esto, se pueden determinar los valores de estas cantidades, que presuponen las fórmulas (107), por interpolación para cada tiempo $t - \omega$. Luego, cada observación sugiere

- 1) encontrar a, d, l, i, n, N para el tiempo $t - \omega$, donde se supone que ω está tan cerca de la verdad como se sabe antes de la

observación (para **ocultaciones de las estrellas fijas** a , d , l son constantes e i desaparece);

- 2) el cálculo de ξ , η , ζ y, por lo tanto, m y M (ζ no es necesario para ocultaciones de estrellas fijas)
- 3) el cálculo de una de las dos fórmulas (107).

Una segunda aproximación al valor de ω estaría basada en las derivadas de la primera (aproximación); pero nunca será necesario si el que se toma como base es correcto hasta unos minutos. Por cierto, en el caso de las **ocultaciones de las estrellas fijas**, sólo se produciría un cambio en la tercera parte del cálculo.

La **duración total de un eclipse solar para la Tierra puede ser de más de 6 horas**, la de una **ocultación de estrellas fijas de casi 5 horas**. Si uno u otro se observaran en toda la extensión del espacio terrestre que limita su visibilidad, los valores de $t - \omega - \tau$ se obtendrían hasta 2 o 3 horas, y no sería conveniente calcular valores tan grandes (de forma logarítmica).

En este caso se preferiría tomar como base dos valores de τ , uno para observaciones anteriores y otro para observaciones posteriores, y así buscar n y N a partir de ambos. También se podría, si se quisiera dar aún mayor importancia a la pequeñez de los $t - \omega - \tau$ resultantes del cálculo de las fórmulas (107), cada una de las horas para los que se han calculado los elementos del eclipse como τ suponen .

II. Si se quiere basar el cálculo de cada observación en un valor de τ lo más cercano posible a él, es decir, $\tau = t - \omega$, entonces hay que buscar los valores de x_0 y y_0 interpolando la serie dada de elementos,

pero asumiendo n y N tales que $n * \sin N$ y $n * \cos N$ se convierten en las derivadas de x e y en el tiempo τ .

Según las fórmulas dadas en el apartado § 17 para el Caso II, se tienen las expresiones de estas derivadas, si no se va más allá de las terceras diferencias, que siempre son suficientes, para los diferentes instantes para los que se calculan los elementos se asume,

para la 1°	$\Delta_1 - \Delta_2 / 2 + \Delta_3 / 3$
para la 2°	$b - \Delta_3 / 6$
para la 3° etc.	$b - d / 6$
para la anteúltima	$b - \Delta_3 / 6$
para la última	$\Delta_1 + \Delta_2 / 2 + \Delta_3 / 3$

y se interpola en el medio para cada valor del tiempo τ . Por cierto, el cálculo permanece como antes.

El primer tipo de procedimiento genera m y M mediante el uso de x_0, y_0 , que ocurren directamente entre los elementos del eclipse, el segundo los hace dependientes de los valores de estas cantidades, que, para cada observación, deben buscarse por interpolación entre los elementos. En cambio, el segundo tiene la ventaja sobre el primero de que el miembro (107*)

$$m * \sin (M - N + \psi) / (n * \sin \psi)$$

es sólo la corrección del valor asumido de ω y, como suele ser muy pequeño, se puede encontrar mediante un cálculo algo más fácil que con la magnitud similar en la primer manera. La convergencia del segundo a la verdad es también la mayor posible; el error de la primera aproximación consiste únicamente en el hecho de que el movimiento de la Luna durante la diferencia de tiempo entre los meridianos supuestos y observados del lugar de observación, se

toma tal como es al principio o al final de esta diferencia de tiempo, mientras que debe tomarse por el medio de (entre) ellos. —Aunque la segunda manera de proceder tiene realmente estas ventajas sobre la primera, parece prevalecer esta peculiar ventaja, por lo que yo la prefiero, al menos cuando hay que calcular varias observaciones.

§ 42.

El método presentado se puede aplicar, a discreción del calculista, para que x , y , a , d , μ , ϕ' se refieran al **ecuador** o a la **eclíptica**. El resultado del cálculo (ω) no guarda relación con ninguno de estos círculos mayores, y sirven, en el curso del mismo, sólo como un medio para indicar la posición de los puntos de interés en la **esfera celeste**. Sin embargo, el primero es siempre más fácil cuando ya se encuentran las posiciones de las **estrellas** en relación con el **ecuador**; incluso si este no es el caso, se deben calcular varias observaciones al mismo tiempo. Pero si se dispone de pocas observaciones, y hay que tomar las ubicaciones de las estrellas de las tablas mismas, o de las **efemérides** que contienen **longitudes** y **latitudes**, entonces el trabajo preparatorio, que requiere su reducción al **ecuador**, se vuelve más laborioso que la búsqueda para la longitud y latitud del cenit, en cuyo caso la eclíptica merece preferencia.

Principalmente, las observaciones únicas de los **eclipses solares**, u **ocultaciones de estrellas por la Luna**, realizadas en un período de tiempo para el cual no se dispone de las efemérides de las ascensiones rectas y declinaciones, dan lugar a casos en los que el cálculo se hace más fácil cuando se realiza (a través de) las latitudes y longitudes. Entonces se supondrá como τ el tiempo de observación reducido mediante el valor aproximado provisionalmente conocido de la diferencia con el mediodía en el **primer meridiano (de París)**,

se buscará la longitud, latitud y paralaje horizontal ecuatorial de la Luna para ese instante, y a partir de esto, combinado con la longitud y latitud del **Sol** o la **estrella**, calcular **x** e **y**; además, uno buscará las variaciones horarias de longitud, latitud y paralaje, y obtendrá **x'**, **y'** diferenciando las expresiones de **x**, **y** en relación con estas cantidades; finalmente se calculará la longitud y la latitud del cenit, y se usarán éstas en lugar de **μ** y **φ'** en las expresiones de **ξ** y **η**.

§ 43.

Todavía es necesario desarrollar más esa parte de las fórmulas (107) que depende de las mejoras en los elementos de cálculo.

Primero consideraré las partes de **λ** y **λ'** dependientes de **Δx** y **Δy**. Las expresiones de **x** e **y**, a saber:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + n * \sin N * (t - \omega - \tau) \\y &= y_0 + n * \cos N * (t - \omega - \tau)\end{aligned}$$

resultando en lo siguiente:

$$\begin{aligned}x * \sin N + y * \cos N &= x_0 * \sin N + y_0 * \cos N + n * (t - \omega - \tau) \\-x * \cos N + y * \sin N &= -x_0 * \cos N + y_0 * \sin N\end{aligned}$$

La segunda (fórmula), como puede verse en esto, es independiente del tiempo. Si se escribe **x** para ello, se tiene

$$x^2 + y^2 = x^2 + (x_0 * \sin N + y_0 * \cos N + n * (t - \omega - \tau))^2$$

cuya expresión, en el instante en que desaparece el segundo término, se reduce a su **mínimo = x²**. Si este tiempo, relacionado con el primer meridiano (de París), se denota por **T**, se establece

$$T = t - (x_0 * \sin N + y_0 * \cos N) / n$$

$$x = -x_0 * \sin N + y_0 * \cos N \dots\dots\dots (110)$$

por lo que **T** significa el instante en que $(x^2 + y^2)^{0,5}$ se vuelve más pequeño = **x**. Expresado de esta manera, se convierte en

$$x * \sin N + y * \cos N = n * (t - w - \tau)$$

$$-x * \cos N + y * \sin N = x \dots\dots\dots (111)$$

e inmediatamente continua que las partes dependientes de Δx y Δy , son

de $\lambda \dots\dots\dots -n * \Delta T + \Delta n * (t - w - \tau)$
 de $\lambda' \dots\dots\dots \Delta x$
 de $\lambda + \lambda' * \tan \psi \dots\dots -n * \Delta T + \Delta x * \tan \psi + \Delta n * (t - w - \tau)$

También consideraré las partes de **x** e **y** dependientes de Δe^2 . Teniendo,

$$\rho * \cos \phi' = \cos \phi / (1 - e^2 * (\sin \phi)^2)$$

$$\rho * \sin \phi' = \sin \phi * (1 - e^2) / (1 - e^2 * (\sin \phi)^2)$$

la derivada (valor diferencial) de estas cantidades tomadas en relación con e^2 se puede dar de la forma

$$d(\rho * \cos \phi') / de^2 = \beta^2 * \rho * \cos \phi' / 2$$

$$d(\rho * \sin \phi') / de^2 = \beta^2 * \rho * \sin \phi' / 2 - \beta$$

donde (β es igual)

$$\beta = \rho * \sin \phi' / (1 - e^2)$$

De esta forma se obtiene, según las expresiones (fórmulas) (7):

$$d\xi / de^2 = \beta^2 * \xi / 2$$

$$d\xi / de^2 = \beta^2 * \eta / 2 - \beta * \cos d$$

y las partes buscadas de λ y λ' :

$$- \beta^2 * (\xi * \sin N + \eta \cos N) / 2 + \beta * \cos d * \cos N$$

y

$$- \beta^2 * (-\xi * \cos N + \eta \sin N) / 2 + \beta * \cos d * \sin N$$

Escribiendo para ξ y η

$$\xi = x_0 - (x_0 - \xi) = x_0 - m * \sin M$$

$$\eta = y_0 - (y_0 - \xi) = y_0 - m * \cos M$$

luego, de acuerdo con la fórmula (110), estas expresiones se transforman en

$$- \beta^2 * (n * (\tau - T) - m * \cos (M - N)) / 2 + \beta * \cos d * \cos N$$

y

$$- \beta^2 * (x + m * \sin (M - N)) / 2 + \beta * \cos d * \sin N$$

o, allí en (107) son

$$- m * \cos (M - N) = L * \cos \psi + n * (t - \omega - \tau)$$

$$m * \sin (M - N) = L * \sin \psi$$

en

$$- \beta^2 * (L * \cos \psi + n * (t - \omega - T)) / 2 + \beta * \cos d * \cos N$$

y

$$- \beta^2 * (x + L * \sin \psi) / 2 + \beta * \cos d * \sin N$$

Se tiene, por lo tanto, la parte de $\lambda + \lambda' * \tan \psi$ que depende de Δe^2

$$- (\beta^2 * (n * (t - \omega - T) + x * \tan \psi + L / \cos \psi) / 2 - \beta * \cos d * \cos (N - \psi) / \cos \psi) * \Delta e^2$$

En esta fórmula, el ángulo **N** se resta del círculo de declinación; pero si no se usan en el cálculo las ascensiones rectas y declinaciones, sino las longitudes y latitudes (eclípticas), entonces no se llega a conocer este ángulo bajo la misma designación **N**, sino el semejante contado desde el círculo de latitud; también entonces **d** no significa la declinación, sino la latitud del punto **Z** en la esfera celeste.

Si, para distinguir claramente ambos casos, se designa la longitud y latitud de este punto por (**a**) y (**d**), y el valor del ángulo **N** encontrado en la aplicación de longitudes y latitudes por (**N**), entonces **IV = (IV) - q**, donde **q** denota el ángulo entre el círculo de declinación y el círculo de latitud, que, como **cos d**, está determinado por las fórmulas

$$\begin{aligned} \cos d * \cos q &= \cos (d) * \cos \varepsilon - \sin (d) * \sin \varepsilon * \sin (a) \\ \cos d * \sin q &= \sin \varepsilon * \cos (a) \end{aligned}$$

se encuentra a partir de la longitud, latitud y oblicuidad de la eclíptica (ε) conocidas.

La expresión completa de la influencia en las mejoras de los elementos de cálculo sobre ω , es, según el desarrollo dado:

$$\begin{aligned}
 & -\Delta T + \Delta x * h * \tan \psi / n + \Delta l * h / (\cos \psi * n) + \\
 & + \Delta n * (t - \omega - T) / n - \Delta e^2 * h * (\beta^2 * (n * (t - \omega - T) / h + \\
 & + x * \tan \psi + L / \cos \psi) / 2 - \beta * \cos d * \cos (N - \psi) / \cos \psi) / n \\
 & \dots\dots\dots (112)
 \end{aligned}$$

donde los tiempos se expresan en segundos, y **h** denota el número de segundos que contiene cada hora de las efemérides en la unidad de tiempo en que esto sucedió y además se da la observación.

Si esta unidad de tiempo no está (dada en) hora media, sino en hora sidérea o en hora verdadera, se escribe μ o t' en lugar de t , según las designaciones en el apartado § 40; pero en lugar de T la hora sidérea u hora verdadera, que equivale a esta hora media.

§ 44.

La observación de la hora del comienzo o del final de un eclipse produce una ecuación de condiciones entre las diversas cantidades por las que se determina este instante; cuya ecuación condicional obtiene su forma más simple de la fórmula (107) si se da la expresión (112) a los tres últimos términos de la misma.

Si se dispone de varias observaciones, entonces, en términos generales, se pueden determinar tantas incógnitas, pero para su determinación ventajosa es necesario, además de la existencia de las ecuaciones dadas por las observaciones, que no difieran de esas cantidades, de manera aproximada contienen la misma relación.

Cuál de las cantidades desconocidas, en cada caso en particular, puede determinarse a partir de las observaciones existentes, surge más completamente de las ecuaciones desarrolladas para ellas; pero daré lugar aquí a algunas observaciones generales al respecto.

La incógnita ΔT , correspondiente a un error de ubicación, en la órbita aparente que describe en la esfera celeste uno de los astros o el otro, obviamente sólo puede determinarse si ω , donde (ocurre) el contacto, al menos para uno de los lugares de observación que se conozca. Cada observación genera una expresión de $\omega + \Delta T$ por Δx , Δl , Δn , Δe^2 , que, si se hace en un lugar cuyo ω debe considerarse desconocido, solo puede contribuir a la determinación de las últimas cuatro cantidades si existe una segunda observación para las cuales estas cantidades tienen valores iguales; es decir, cuando en el mismo lugar se observa el principio y el fin del eclipse.

En este caso la desaparición de la diferencia entre las expresiones de $\omega + \Delta T$ pertenecientes a ambos da la ecuación por la cual ambas observaciones contribuyen a la determinación de las cuatro cantidades; por otro lado, cada observación individual en un lugar cuyo ω se conoce genera una ecuación entre estas cantidades y ΔT .

Aparentemente, la separación de Δx , Δl , Δn , Δe^2 entre sí, en la medida en que debe obtenerse mediante la observación de un eclipse, se basa únicamente en las diferencias en el curso de los acontecimientos que aparecen en diferentes lugares de la observación: solo puede tener éxito si las distancias de estos lugares entre sí son comparativamente grandes con el radio de la Tierra, no siendo magnitudes pequeñas. Por ejemplo, el Δn resultante de un error en la paralaje horizontal asumido en el cálculo sólo puede separarse de ΔT si la diferencia de las horas de observación referidas al primer meridiano (de París) en diferentes lugares, una parte considerable de las más grandes (diferencias) que ocurren en la Tierra, es significativa; Δe^2 se separa (anula) de las otras cantidades desconocidas solo por la diferencia en los valores de β , es decir, las alturas polares de los puntos de observación. -Ciertos casos de eclipses, sin embargo, pueden facilitar la separación de una de las

cantidades desconocidas del resto; por ejemplo, los casos del contacto interior del limbo del Sol con el de la Luna provocan la separación (anulación) de Δl , así como los casos del **tránsito de Venus por el Sol** también provocan la separación de Δn . Además, las observaciones de varios eclipses que ocurren casi simultáneamente pueden ser de gran utilidad en la presente relación, por ejemplo, las observaciones de los contactos exteriores e interiores del limbo del Sol y con el de la Luna, y de las ocultaciones por la Luna a través de grupos de estrellas, cuyas ubicaciones son relativamente conocidas.

En general, la ocurrencia de aquellas circunstancias de las observaciones que conducen a la determinación exitosa de todas las incógnitas, se requiere que la grandeza sea tan difícil de alcanzar que casi nunca tendrá éxito. Las observaciones de las **ocultaciones lunares de las estrellas fijas** se han sugerido repetidamente como un medio para determinar el **achatamiento de la Tierra**; sin embargo, estas propuestas nunca procedían de un desarrollo suficiente que, de haberse llevado a cabo, probablemente habría demostrado que la ecuación que arrojan las observaciones existentes para la determinación de Δe^2 , después de la eliminación de las restantes cantidades desconocidas, está libre de los inevitables errores de observación, se vuelva demasiado dependiente para poder ganar confianza en sus resultados. Es cierto que las horas de entrada (1° contacto) y de salida (último contacto) con las estrellas fijas, en el limbo oscuro de la Luna se suelen observar con mucha precisión, pero es mucho más raro que observaciones similares en el limbo brillante proporcionen una certeza satisfactoria; también se dan sobre el borde montañas sobresalientes de la Luna (que) dan una influencia esencial en estas horas (de 1° y último contacto); finalmente, la presencia del Sol sobre el horizonte excluiría también los puntos de observación de una ocultación estelar, que serían necesarios para la separación ventajosa de todas las magnitudes desconocidas entre sí. -En el caso

de contacto exterior de los limbos durante los eclipses solares, la certeza de las observaciones es mucho menor, especialmente al comienzo de las mismas, por lo que cualquier conclusión se vuelve engañosa si tiene que partir de la suposición de que sus observaciones son correctas dentro de los **3" a 4"**.

Pero en la medida en que la anulación de las diversas cantidades desconocidas se vuelve difícil, también se vuelve menos necesaria. Si, por ejemplo, las ecuaciones que dejan las observaciones, después de la eliminación de una o dos de ellas, se vuelven casi indefinidas, se puede considerar que las otras, sin campos significativos, se junten con ellas, de modo que ciertos resultados de las observaciones, por ejemplo, las diferencias con el mediodía de los lugares de observación, incluso sin una eliminación completa de las cantidades desconocidas, pueden liberarse aproximadamente de ellas.

§ 45.

Si las observaciones, en un caso que se ha producido, no bastan para la determinación de todas las cantidades indefinidas de la expresión **(112)** y su completa eliminación de los resultados, entonces la elección de aquellas a eliminar, preferentemente debe proceder de la consideración de las cantidades de su indefinición y de su influencia. Diferentes tipos de eclipses pueden requerir diferentes opciones; lo que voy a decir ahora al respecto se relaciona con los **eclipses causados por la Luna**.

De sus **tablas**, o **efemérides**, se convierten sus coordenadas en geocéntricas, su paralaje ecuatorial y la proporción de su radio con respecto a ella (Luna); de cambios indefinidos en estas magnitudes, así como de otras similares pertenecientes a las estrellas eclipsadas, surgen las magnitudes indefinidas **ΔT , Δx , Δl , Δn** . Los errores de las

ubicaciones de ambos astros (Luna y Sol) deben considerarse bastante indefinidos, mientras sus teorías aún no sean completamente precisas; el error de la paralaje de la Luna se debe considerar como arbitrario en cada caso, o como una cantidad constante desconocida, el primero cuando las desigualdades de su expresión teórica son dudosas, el segundo cuando se supone que son ciertas; los errores en las proporciones de los radios (referidas) a las paralajes son en cualquier caso cantidades desconocidas constantes. Los errores, que han de considerarse indefinidos, deben eliminarse de los resultados, en la medida en que las observaciones sean suficientes; las cantidades a considerar como permanentes no deben determinarse en cada caso particular y eliminarse de los resultados, sino que su determinación debe dejarse a la evidencia colectiva de todas las observaciones que pueden usarse para este propósito, y su eliminación de los resultados debe solamente estar preparada especificando sus influencias. Si ha de extraerse de ellas todo el uso que puede hacerse de las observaciones de cada caso en particular para la determinación de las magnitudes constantes, deben desarrollarse a partir de ellas las ecuaciones por las que contribuyen a esta determinación.

El estado actual del conocimiento de los movimientos de la Luna justifica la suposición de que su paralaje, para cualquier eclipse, se conoce con mucha mayor certeza que sus ubicaciones geocéntricas; además, la teoría deja sus desigualdades tan inseguras que el desarrollo cuidadoso de ellas debe hacer que su posible error, al menos casi, sea constante. De esto continua que el cálculo de las observaciones de un eclipse debe proceder principalmente de la eliminación de las ubicaciones de los astros (Sol y Luna) desde los resultados. Examinaré cómo las magnitudes indefinidas de la expresión (112) se relacionan con los cambios indefinidos de (sus) ubicaciones, radios y paralajes.

Si uno tiene

$$x = \cos \delta * \sin (\alpha - a) / \sin \pi;$$

$$y = (\cos d * \sin \delta - \sin d * \cos \delta * \cos (\alpha - a)) / \sin \pi$$

se (puede) abreviar escribiendo

$$x = X / \sin \pi; \quad y = Y / \sin \pi$$

entonces si uno se pregunta (sobre) los cambios de x e y , resultantes de los cambios de los elementos:

$$\Delta x = \Delta X / \sin \pi - x * \Delta \pi / \tan \pi;$$

$$\Delta y = \Delta Y / \sin \pi - y * \Delta \pi / \tan \pi$$

y por tanto según la fórmula (111):

$$(\Delta X * \sin N + \Delta Y * \cos N) / \sin \pi - n * (t - \omega - T) * \Delta \pi / \tan \pi =$$

$$= - n * \Delta T + \Delta n * (t - \omega - T)$$

$$(-\Delta X * \cos N + \Delta Y * \sin N) / \sin \pi - x * \Delta \pi / \tan \pi = \Delta x$$

y si (tenemos) ahora

$$\Delta n / n = - \Delta \pi / \tan \pi$$

suponemos también

$$(\Delta x * \sin N + \Delta Y * \cos N) / \sin \pi = - n * \Delta T$$

$$(-\Delta x * \cos N + \Delta Y * \sin N) / \sin \pi = \Delta x + x * \Delta \pi / \tan \pi$$

por lo que se deduce que la suposición de valores invariables de Δn , ΔT , Δx durante la duración del eclipse, requiere que también

$$\Delta\pi / \tan \pi; \Delta X / \sin \pi; \Delta Y / \sin \pi$$

se suponen que son inalterables durante el mismo período. Las expresiones de las dos últimas de estas cantidades son:

$$\begin{aligned} & \cos \delta * \cos (\alpha - a) * \Delta(\alpha - a) / \sin \pi - \\ & - \sin \delta * \sin (\alpha - a) * \Delta\delta / \sin \pi; \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \cos \delta * \sin (\alpha - a) * \Delta(\alpha - a) * \sin d / \sin \pi + \\ & + (\cos d * \cos \delta + \sin d * \sin \delta * \cos (\alpha - a)) * \Delta\delta / \sin \pi - \\ & - (\sin d * \sin \delta + \cos d * \cos \delta * \cos (\alpha - a)) * \Delta d / \sin \pi; \end{aligned}$$

y para el instante del contacto entre ambos cuerpos celestes, o para el correspondiente $\alpha - a = 0$, se transforman en

$$\begin{aligned} & \cos \delta * \Delta(\alpha - a) / \sin \pi \text{ y} \\ & \cos (\delta - d) * \Delta(\delta - d) / \sin \pi \end{aligned}$$

Entonces, si se supone que δ , π , $\Delta(\alpha - a)$, $\Delta(\delta - d)$ son válidos para este instante y se asigna 1 para $\cos (\delta - d)$, π para $\sin \pi$ y $\tan \pi$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} -\Delta T = & \cos \delta * \Delta(\alpha - a) * \sin N / (n * \pi) + \\ & + \Delta(\delta - d) * \cos N / (n * \pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x = & -\cos \delta * \Delta(\alpha - a) * \cos N / \pi \\ & + \Delta(\delta - d) * \sin N / \pi - x * \Delta\pi / \pi \end{aligned}$$

$$\Delta n / n = - \Delta \pi / \pi$$

La expresión de l es (12)

$$s * \tan f = z * \tan f \pm k / \cos f$$

o

$$l * \cos f = z * \sin f \pm k = z * (\sin H \pm \sin \Pi) / (r' * g) \pm k$$

y (si) g no es fundamental (queda de esta manera) diferente

$$1 - m = 1 - \sin \Pi / (r' * \sin p)$$

como z no lo es perceptiblemente de $1 / \sin \pi$. Por ello (se tiene)

$$l * \cos f = (\sin H \pm r' * k * \sin \pi) / (r' * \sin \pi - \sin \Pi)$$

y con suficiente aproximación

$$\Delta l = \pm \Delta k + \Delta H / (r' * \pi) - H * \Delta \pi / (r' * \pi^2)$$

donde H es el radio medio y r' la distancia del astro más lejano (Sol, estrella o planeta), medida a través desde el centro de la Tierra hasta el centro del Sol.

Para las **ocultaciones de las estrellas fijas**, $\Delta l = \Delta k$. Si estas expresiones se sustituyen en la expresión (112), de modo que los términos que dependen de los cambios en los radios, de $\Delta \pi$ y de Δe^2 , se separan entre sí, se convierte en

$$v * (\sin N * \cos \delta * \Delta(\alpha - a) + \cos N * \Delta(\delta - d)) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ v * (-\cos N * \cos \delta * \Delta(\alpha - a) + \sin N * \Delta(\delta - d)) * \tan \psi + \\
 &+ (\Delta H / r' \pm \pi * \Delta k) / \cos \psi - \\
 &- v (n * (t - \omega - T) / h + x * \tan \psi + H / (r' * \pi * \cos \psi)) * \Delta n - \\
 &- v (\beta^2 * (n * (t - \omega - T) / h + x * \tan \psi + L / \cos \psi) / 2 - \\
 &- \beta * \cos d * \cos (N - \psi) / \cos \psi) * \pi * \Delta e^2 \dots \dots \dots (113)
 \end{aligned}$$

donde v , para abreviar, se escribe para $h / (n * \pi)$, lo que significa el número de segundos de tiempo en los que los cuerpos celestes se mueven relativamente por un segundo.

§ 46.

Además de la primera cantidad desconocida de las fórmulas (112) y (113), que se combina con la diferencia con el mediodía, primero se debe determinar lo multiplicado en $\tan \psi$. Esto generalmente mermará el poder de las observaciones existentes; a menudo, estas no serán suficientes por sí solas y requerirán del apoyo de buenas observaciones en los meridianos. Sin embargo, también habrá casos que permitan la determinación ventajosa de la cantidad desconocida multiplicada en $1 / \cos \psi$; por ejemplo, los contactos internos del limbo del Sol y con el de la Luna, especialmente cuando se observan cerca de ambos límites del área estrecha sobre la Tierra (ruta del eclipse central) donde este fenómeno es visible. Las observaciones de las **ocultaciones de las estrellas fijas** realizadas solo en Europa prometen, en general, poco éxito en la determinación de Δk .

Por raras que sean las observaciones de un eclipse que permitan ir más allá, hay casos en los que pueden proporcionar los medios más valiosos para determinar la **paralaje de la Luna**. Aprovecho esta oportunidad para llamar la atención sobre esto; esperando, al enfatizar la importancia de tales casos, estimular los esfuerzos de los observadores para hacerlo. La fórmula (112) muestra

inmediatamente que la eliminación de la paralaje de otras cantidades desconocidas se obtiene a través de la diferencia en los tiempos de observación en diferentes lugares; cuanto más ventajosa, por lo tanto, mayor es esta diferencia. Los contactos interiores del limbo del Sol con el de la Luna se pueden observar muy de cerca; su observación en dos regiones de la Tierra, una de las cuales se percibe cerca de la salida del Sol y la otra cerca de la puesta, promete un mayor éxito en la determinación de la paralaje de la Luna que otros medios de astronomía práctica.

Es necesario que las diferencias con el mediodía desde los lugares de observación, independientes de los eclipses, estén bien determinadas y que en todas partes se observen los mismos instantes del fenómeno; en el caso de un eclipse anular, las horas de aparición completa (del anillo) y de la primera discontinuidad (deformación) del anillo; en el caso de un eclipse total, el de la desaparición completa (totalidad) y la primera reaparición del Sol. Es deseable que en cada una de las dos regiones, que están muy separadas, se ocupen varios sitios de observación (en cada región).

Sin embargo, como no es de esperar que los fenómenos que pueden aumentar la certeza del conocimiento de la paralaje lunar despierten tanto interés como las observadas a causa de la paralaje solar suscitada en los años **1761** y **1769**, cabe esperar ser utilizados, basándose únicamente en el **estado de actividad existente** para la observación astronómica. Tal como ahora, en este caso (**15.05.1836**), un eclipse de Sol, apareciendo centralmente no sólo en Europa, sino también en los **Estados Unidos de América del Norte**, incluso sin razones especiales para su observación, probablemente proporcionaría lo que es necesario para una investigación sobre la paralaje de la Luna.

Que las raras ocurrencias de este tipo puedan ser tratadas como importantes eventos astronómicos es el deseo del que ha surgido esta observación sobre su peso en la determinación de la paralaje lunar. Por cierto, es fácil notar que la diferencia con el mediodía entre dos puntos de la Tierra que están muy separados (entre sí) sufre casi los mismos cambios en diferentes eclipses debido al mismo error en la paralaje de la Luna; de modo que su valor, que se supone conocido, no debe derivarse de las observaciones de los eclipses si se va a convertir en la base de una investigación de la paralaje. El método de las culminaciones lunares introducido en la práctica astronómica por **Gauss** es, por lo tanto, el que debe utilizarse; por ende, al menos un lugar en **América** debe conectarse con los observatorios europeos y luego tomarse como base para determinar las diferencias con el mediodía de (aquellos) otros lugares americanos.

Los **tránsitos de la Luna** por las **Pléyades** merecen especial atención. Si se puede suponer que se conocen las posiciones relativas de las estrellas en este grupo, entonces cada expresión (de las cinco primeras) de la fórmula (113), para la determinación de las magnitudes desconocidas, proporciona tantas ecuaciones como instantes observados se han proporcionado, para la **primera** (expresión), se relaciona con la diferencia con el mediodía la misma, como con la **segunda**, tiene tan pocos valores diferentes para las diferentes estrellas que se puede suponer que son iguales para todas; la **tercera** es $= \pi * \Delta k$ para todas las ocultaciones de estrellas fijas; la **cuarta** se relaciona únicamente con la Luna, la **quinta** únicamente con la Tierra.

El caso más común, en el que sólo se pueden hacer con precisión las observaciones de las entradas (primeros contactos con el limbo lunar), o sólo las de las salidas, pero no ambas, genera, para un (caso) u otro solo, una serie de ecuaciones basadas en ciertas

observaciones, que, especialmente si la Luna pasa al **Norte** de algunas estrellas y al **Sur** de las otras, hace que la determinación de los valores de las dos o tres primeras incógnitas, y la eliminación de los resultados, sea mucho más completa de lo que cabría esperar en el caso de la ocultación de una sola estrella fija.

De ahí que el valor que adquiere un paso de la Luna por las Pléyades, observado desde dos lugares, para la determinación de la diferencia con el mediodía, comparado con el valor de la observación de una sola ocultación estelar, aumenta más que el número de estrellas ocultas; de modo que si esas observaciones (suponiendo una determinación exacta del tiempo) han tenido éxito unas cuantas veces, el peso de la diferencia con el mediodía resultante puede incrementarse con otras ocultaciones estelares individuales. Pero las ocultaciones de las Pléyades tienen esta gran ventaja sólo cuando se conocen las posiciones relativas de sus estrellas con la precisión necesaria para obtenerla. Esta fue una de las causas del trabajo sobre las Pléyades publicado en el primer volumen; espero que la lista de 53 de sus estrellas, basada en observaciones heliométricas (**Libro I, pág. 237**), también sea suficiente en el presente contexto.

La misma causa que hace que los tránsitos de la Luna a través de las Pléyades sean especialmente valiosos para determinar las diferencias con el mediodía, también tiene la consecuencia de hacer determinaciones muy seguras de su posición relativa; más seguro que el que puede obtenerse por cualquier otro medio; por lo tanto, es principalmente adecuado para probar la precisión de una teoría lunar. El valor de tales determinaciones aumenta al ser las más tempranas con suficiente precisión que se pueden obtener mediante la observación. La recopilación y reducción de aquellas observaciones de este tipo, cuya sincronización correcta puede ser razonablemente asegurada, haría una contribución esencial al

estudio de los movimientos de la Luna: una contribución cuyo valor recompensaría el trabajo que costará su aprendizaje.

§ 47.

La **ecuación básica del análisis de los eclipses** dada en la **primera sección** y continuada más adelante, es la expresión de la condición de que un punto que percibe el contacto de los limbos de los dos astros (Luna y Sol) esté ubicado en la superficie de uno de los dos conos rectos que envuelven ambos astros; todo lo que he derivado de esta ecuación en los siguientes apartados supone que este punto se encuentra en la supuesta superficie esférica de la Tierra. Pero la refracción de los rayos en la atmósfera hace que las líneas rectas que se encuentran en la superficie del cono se curven, de modo que esta superficie en realidad deja de ser la de un cono; además, las irregularidades existentes en la superficie física de la Tierra hacen que los lugares de observación, en general, no se encuentren en sus lugares registrados. Por lo tanto, es necesario considerar estas diferencias entre la realidad y el supuesto considerado.

Que la refracción de los rayos no tiene influencia sobre los fenómenos de los eclipses se ha dicho varias veces y más a menudo se ha aceptado tácitamente. **Hansen**, sin embargo, notó el error en esta suposición, y así mostró la necesidad de mejorar las teorías previas de estos fenómenos **(I)**. —La asíntota del rayo que llega al ojo desde el punto de contacto de los limbos corta la línea perpendicular del ojo en un punto donde, si no hubiera refracción, el contacto de los limbos aparecería exactamente como realmente lo es. Por lo tanto, la influencia de la refracción se tiene en cuenta desplazando el punto de observación a este punto, cuya elevación denotaré por **h'** ; si no está en la supuesta superficie de la Tierra, sino a la altura **h** por encima de ella, entonces debe suponerse en su perpendicular, **$h + h'$** por encima de esta superficie. Este aumento

en la posición de observación cambia los valores utilizados anteriormente de $\rho * \cos \phi'$ y $\rho * \sin \phi'$ en

$$\rho * \cos \phi' + (h + h') * \cos \phi \text{ y } \rho * \sin \phi' + (h + h') * \sin \phi$$

o, de acuerdo con las fórmulas (14), en:

$$\rho * \cos \phi' * (1 + (h + h') * (1 - e^2 * (\sin \phi)^2)^{0,5}) \text{ y}$$

$$\rho * \sin \phi' * (1 + (h + h') * (1 - e^2 * (\sin \phi)^2)^{0,5} / (1 - e^2))$$

Sin embargo, h y h' son siempre magnitudes muy pequeñas, rara vez aumentan a tresmilésimas, razón por la cual se desprecian sus productos en e^2 , es decir, ambas magnitudes en la misma proporción $1 + h + h'$, que tampoco difiere apreciablemente de $(1 + h) * (1 + h')$ es diferente, puede aumentar. La consideración de ambas causas se reduce así a sumar las cantidades de estos dos factores a las cantidades de ρ utilizadas hasta ahora en el cálculo.

Buscaré las expresiones de ambas cantidades. Si uno expresa la elevación del sitio de observación sobre la superficie de la supuesta esfera elíptica de rotación en toesas y asume el radio del ecuador de la Tierra = **3.272.077,14 toesas (6.377,27834586 km)**, entonces está lo suficientemente cerca

$$(1 + h) = h * 0,0000013273 \text{ (log = 3,12296)}$$

Suponiendo que la atmósfera se componga de (varias) capas concéntricas, siendo ρ la densidad de una de ellas, siendo $\mu * \rho$ su poder de refracción, siendo r su distancia al centro, denotándose por z el ángulo de un rayo que la interseca, entonces la conocida propiedad característica de la trayectoria del rayo es que el producto $r * \sin z * (1 + \mu * \rho)^{0,5}$ tiene un valor constante. Denotando los

valores de r , z , ρ para el punto del rayo donde está el ojo por a , θ , (ρ) , entonces

$$r * \sin z * (1 + \mu * \rho)^{0,5} = a * \sin \theta * (1 + \mu * \rho)^{0,5}$$

Si se traza una tangente al punto del rayo determinado por r y z , y corta la extensa recta en el punto distante al ojo x , en el ángulo ζ , entonces queda así

$$r * \sin z = (a + x) * \sin \zeta$$

y por lo tanto

$$(a + x) * \sin \zeta * (1 + \mu * \rho)^{0,5} = a * \sin \theta * (1 + \mu * \rho)^{0,5}$$

Relacionando el primer término de esta ecuación con un punto infinitamente distante del rayo, la tangente se convierte en asíntota y se tiene $x = h'$, $\rho = 0$, y ζ se convierte en la distancia cenital verdadera, que, análogamente al θ aparente, lo denotaré por θ' .

La ecuación entonces se convierte en

$$1 + h' / a = \sin \theta * (1 + \mu * (\rho))^{0,5} / \sin \theta'$$

donde a denota el radio de curvatura de la superficie de la Tierra en el azimut del rayo; o, si esto se denota por A ,

$$a = (1 - e^2) / ((1 - e^2 + e^2 * (\cos \phi)^2 * (\cos A)^2) * (1 - e^2 * (\sin \phi)^2)^{0,5})$$

Sin embargo, el producto $h' * e^2$, ya eliminado anteriormente, también puede despreciarse aquí; con mayor razón, ya que uno está acostumbrado a suponer que toda la refracción de los rayos es

Cuarta sección. Aplicación de las Observaciones de los Eclipses

independiente del acimut, y aquí sólo se considera un pequeño efecto de ella. Así que se tiene

$$(1 + h') = \sin \theta / \sin \theta' + (1 + \mu * (\rho)) / 2$$

Este resultado se puede escribir en una tabla, cuyo argumento es la distancia cenital verdadera θ' del punto en la esfera celeste dada por **a, d**. La tabla que estoy dando aquí se derivó de la segunda de las tres combinadas en el **Libro I, pág. 198**, pero más allá de $\theta' = 85^\circ$ de la misma fuente de donde la derivé; el valor de $\mu * (\rho)$ es = **0,0005600**.

Se aplica directamente al estado de la atmósfera para el cual los factores que dependen de las lecturas del **barómetro** y del **termómetro** son β y $\gamma = 1$, pero cambia proporcionalmente muy cerca de estos factores.

θ'	$(1 + h')$ [°]	θ'	$(1 + h')$ [°]
0° 0'	0.0000000000000000	82° 0'	0.000015887963354
10° 0'	0.0000000000000000	83° 0'	0.000019802427865
20° 0'	0.0000000000000000	84° 0'	0.000025559021158
30° 0'	0.000000230258536	85° 0'	0.000033848573717
40° 0'	0.000000230258536	85° 30'	0.000038914445219
50° 0'	0.000000460517125	86° 0'	0.000045592224135
60° 0'	0.000001151293209	86° 30'	0.000053881942756
62° 0'	0.000001381552010	87° 0'	0.000064474460993
64° 0'	0.000001611810864	87° 30'	0.000077600128368
66° 0'	0.000001842069771	88° 0'	0.000094871005801
68° 0'	0.000002072328731	88° 30'	0.000117669020708
70° 0'	0.000002763105929	88° 50'	0.000136782908453
72° 0'	0.000003453883604	89° 0'	0.000148067182343
74° 0'	0.000004374921247	89° 10'	0.000160042469393
76° 0'	0.000005756479301	89° 20'	0.000173399689491
78° 0'	0.000007598559676	89° 30'	0.000188138898001
80° 0'	0.000010591947522	89° 40'	0.000204490461582
81° 0'	0.000012894559655	89° 50'	0.000222684769065
82° 0'	0.000015887963354	90° 0'	0.000242721921001

Cuarta sección. Aplicación de las Observaciones de los Eclipses

Esto muestra que la influencia de la refracción suele ser muy pequeña, pero que no siempre puede despreciarse.

Si uno quisiera trasladarlo al tamaño de la paralaje horizontal de la Luna, permanecería por debajo de **0,01"** hasta $\theta' = 70^\circ$, y solo aumentaría alrededor de **0,1"** para $\theta' = 84^\circ$ y para $\theta' = 90^\circ$ alrededor de un segundo.

(I) *Astron. Nachrichten*. Nro. 347.



Tratado XI

Una herramienta para facilitar las observaciones de los eclipses solares y ocultaciones

Tanto en los eclipses solares como en las ocultaciones normalmente solo se observa el principio o el final (1° contacto y último contacto entre los astros), rara vez se observan ambas fases con la debida certeza: siempre se ve también el comienzo de un eclipse solar y el comienzo del paso de un planeta que transita por el Sol, siempre se ven demasiado tarde a menos que el observador sepa exactamente el punto de los limbos al que dirigir su atención (observación); el egreso de una estrella del disco lunar es el mismo caso, especialmente cuando se produce en el limbo iluminado (lunar). Dado que esta incertidumbre de una parte de la observación, tiene como consecuencia que los valores de las magnitudes desconocidas, que se combinan con el resultado que se deducirá de ella, permanezcan indefinidas o reciban una determinación incierta, perdiendo así algo del valor que le correspondería al resultado si pudiera fundamentarse únicamente en la parte más segura del fenómeno observado. Por lo tanto, es fundamental encontrar algún medio por el cual se pueda conocer el punto de contacto de los limbos (1° y último) donde ocurrirá el fenómeno a observar.

El ángulo de posición de estos puntos en el limbo del Sol o en el de la Luna, según los reglamentos (métodos) dados en la **tercera sección** del **Tratado X** (anterior), o por los números calculados de acuerdo con ellos, el **Astronomische Jahrbuch** de **Encke** indica que para cada eclipse y ocultación que se puede encontrar fácilmente,

solo queda por desear que uno tenga un medio fácilmente aplicable para reconocer el punto correspondiente a un ángulo de posición conocido. —Aparentemente, es uno de los dos puntos donde el limbo puede ser tocado por una línea cuya dirección pertenece a un ángulo de posición diferente de **90°**: uno lo reconoce dando esta dirección a un hilo en el (ocular de un) telescopio (llamado este hilo **heliómetro**) y luego buscando su punto de contacto con el limbo.

Para poder dar una dirección definida al hilo de un telescopio, he modificado uno de los oculares para que pueda girar alrededor de su eje, y la cantidad (magnitud) de cada rotación puede leerse en un corte de graduación en su tubo. —Después de haber promediado la indicación de la aguja en la graduación, que corresponde a la coincidencia del hilo con la dirección del movimiento diurno, añadiéndole el ángulo de posición dado, y girando el ocular hasta que la aguja corresponda a esta suma, da al hilo la dirección requerida.

Cuando el telescopio se monta paralácticamente, la dirección del movimiento diurno puede determinarse de una vez por todas, sobre la división del tubo ocular; pero si, como de costumbre, tiene otra disposición, esta determinación debe hacerse siempre que se haya de observar un eclipse o una ocultación, ya sea por el astro eclipsado mismo, o por otro muy próximo a ella (estrella o planeta). En el caso de un **eclipse solar**, se determina la dirección del movimiento diurno ubicando la posición del hilo que sigue al limbo del Sol justo antes del comienzo esperado. En el caso de una **ocultación de las estrellas**, se puede utilizar una estrella fija situada muy cerca de la Luna, que nunca se buscará en vano con un telescopio que tenga la potencia necesaria para observar las salidas en el limbo brillante. Si no se quiere considerar un error significativo en el punto (por ejemplo de contacto) a encontrar, que puede aumentar hasta medio minuto, se puede asumir el movimiento aparente de la Luna en el telescopio

como el del paralelo, es decir, la dirección del movimiento diario también por su “borde (limbo)”, o identificar uno de sus puntos. — Puesto que el punto en el limbo de la Luna donde reaparecerá una estrella puede identificarse por las manchas (mares, cráteres o montañas) que hay en su vecindad, también puede encontrarse antes de que entre (1° contacto del astro con el limbo lunar); los cambios en los ángulos de posición de los puntos son tan pequeños en el transcurso de una hora que no se tienen en cuenta aquí.

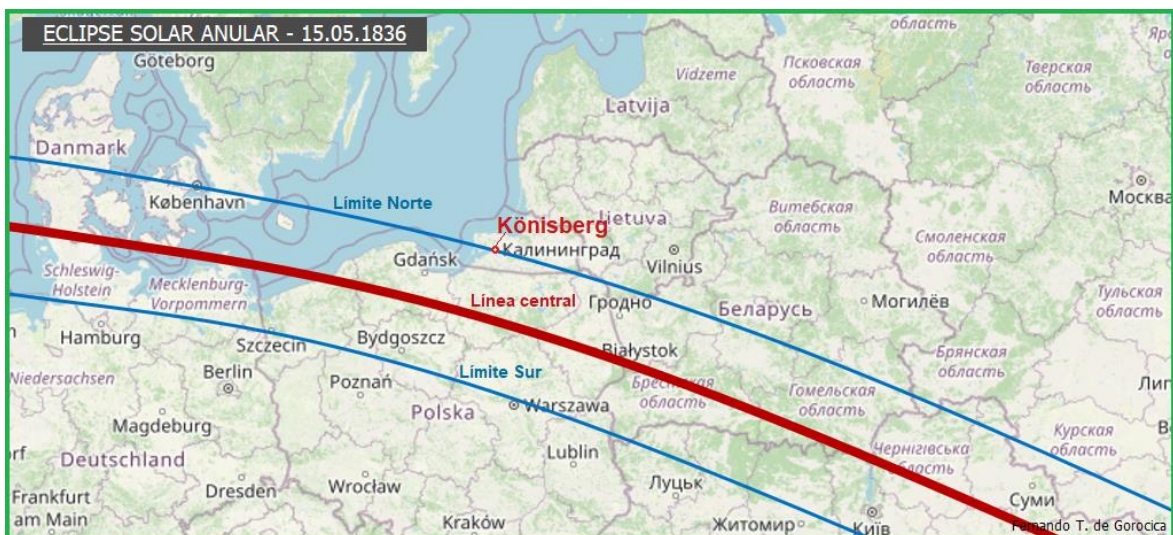
La disposición de un ocular para que gire alrededor de su eje, y la aplicación de una graduación en su tubo, se logran con tanta facilidad, y el uso que de ello se obtiene, los valores así obtenidos en la observación de eclipses y en las ocultaciones es tan considerable que este dispositivo se puede recomendar a todo propietario de un telescopio astronómico. Se utiliza con frecuencia en el **Observatorio de Königsberg**, donde el éxito total (de las observaciones) se pueden obtener casi sin esfuerzo.



Tratado XIII

Observación del eclipse solar anular del 15 de mayo de 1836

El **Observatorio de Königsberg** está tan cerca del límite **Norte** de la ruta del eclipse central sobre la Tierra en la cual este eclipse solar se dio en forma anular (y) que el pronóstico no pudo indicar con certeza si el límite llegaría hasta él o más allá. Las **efemérides de Encke**, que se basan en las **tablas lunares de Burckhardt** y mis tablas solares, todavía daban el eclipse como anular para el **Observatorio de Königsberg**, pero daban a la parte más estrecha del anillo una anchura de menos de **4 segundos**; lo cual, al estar dentro del rango de errores que ocurren según la latitud de la Luna, como lo dan las tablas, dejó en duda si el eclipse realmente parecería anular.



La observación ha demostrado que el **Observatorio de Königsberg** se encontraba fuera de los límites del fenómeno anular, pero que el (límite) **Norte** estaba tan cerca que la parte **Sureste** de la ciudad

probablemente ya estaba dentro de ambos límites. La consecuencia de esta proximidad del observatorio al límite (**Norte**) fue que el limbo de la Luna, en la hora de la mitad del eclipse (eclipse máximo local), apenas oscurecía el limbo del Sol; bajo qué condiciones especiales, rara vez o nunca observadas por los astrónomos, ocurrió un fenómeno de mayor duración, que acontece tan rápidamente en otras circunstancias, que uno no tuvo mejores oportunidades para conocerlo mejor en el pasado. -Dado que aquí la observación promete una contribución al conocimiento de la naturaleza de la superficie luminosa del Sol, me da la oportunidad de dedicarle un ensayo especial.

En el comienzo del eclipse (1° contacto de la Luna con el Sol) lo observé con el heliómetro con un aumento de 179 veces:

Hora Sidérea: 7^h 9' 39,27" =
= Hora del 1° meridiano (de París): 15^h 36' 19,18"

Creo que lo vi lo antes posible, sabiendo exactamente el punto donde aparecería el primer (contacto) del limbo lunar con el limbo del Sol. -Mi hijo **Wilhelm Bessel** (cuya muerte prematura lamento) lo vio **3,07"** luego (del tiempo estimado del 1° contacto), con un aumento de 60 veces de un telescopio **Fraunhofer** de 3 pies y medio; el observador Señor **Dr. Busch** sólo lo notó **7"** después, cuando el evento ya había alcanzado cierta profundidad (la Luna ya pasado el 1° contacto).

Vi el final del eclipse con el mismo ocular del **heliómetro**:

Hora Sidérea: 9^h 37' 43,00" =
= Hora del 1° meridiano (de París): 18^h 03' 59,66"

Wilhelm Bessel lo vio **3,70"** antes; **Busch 2,30"** más tarde. Los telescopios utilizados por ambos eran considerablemente más débiles que el heliómetro (del observatorio), por lo que ambos deberían haber perdido de vista la Luna antes que yo. El hecho de que el **Dr. Busch** anunciara más tarde su desaparición probablemente se deba al ruido inquietante que hacían muchos espectadores que pensaban que podían ver mejor el eclipse junto al observatorio.

Durante el eclipse, el limbo de la Luna frente al Sol mostró picos y valles como de costumbre. Los "cuernos", (como una Luna menguando 1 día antes de nueva), que se volvieron muy finos para el instante del próximo contacto, tenían, hasta donde se podía juzgar a simple vista, en su borde exterior la curvatura regular del limbo del Sol; pero por dentro mostraban las irregularidades del limbo de la Luna.

Si terminaban en un punto del limbo de la Luna que no era notablemente montañoso, aparecían como puntas muy afiladas; mientras que su final, cuando (en el limbo) estaba en la ladera de una montaña, tomaba la forma prescrita por esa montaña. Nunca hubo un (forma) redonda de los cuernos que obviamente no pudiera atribuirse a esta causa. No había nada que apuntara a una irradiación de la imagen del Sol en el telescopio utilizado; de modo que en la presente observación, a este respecto, concuerda enteramente con la del tránsito de **Mercurio** en **1832**, descrito en el tratado anterior (**Capítulo XII, Libro 2**).

Las porciones del disco solar alejadas de las puntas de los cuernos, que probablemente se habrían mostrado si estas puntas, cuando fueran muy finas, hubiesen terminado en partes muy toscas del limbo de la Luna, esperé en vano verlas. Sin embargo, unos **25"** antes del próximo encuentro (limbo lunar con el limbo solar, es decir, el

último contacto interno), cerca del final del pico superior, apareció un punto que, aunque muy lejos de la luz brillante del disco solar, era lo suficientemente conspicuo en el poderoso telescopio del heliómetro.

Como los cuernos ya se habían acercado mucho (entre sí, llegando el limbo lunar a tocar internamente el limbo solar), esperaba ver en cualquier momento formarse el anillo; pero esto no sucedió, sino que el punto mencionado sólo se hizo más brillante, y además de él aparecieron otros puntos similares, que luego se unieron, y de esta manera hicieron visible toda la parte del limbo de la Luna que estaba entre las puntas de los cuernos. Todavía estaba esperando la formación del anillo en sí, y solo me di cuenta de que no ocurriría cuando los puntos individuales en el limbo de la Luna se volvieron invisibles, mostrando que el eclipse estaba nuevamente culminando. Esto fue en la **hora sidérea 8^h 27' 11,46" = 16^h 53' 38,67" hora del 1° meridiano (de París)**; aproximadamente **10 segundos** después no vi ningún rastro del limbo de la Luna.

Durante el tiempo en que el limbo de la Luna era visible pude distinguir claramente montañas y valles en él; los últimos parecían más brillantes que las primeras. El brillo del limbo de la Luna puede estar relacionado con el brillo del Sol, como el brillo del limbo lunar iluminado por la Tierra (albedo) poco después y justo antes de la Luna nueva está relacionado con el brillo de lo iluminado por el Sol (sobre la Tierra y lo refleja).

De esta indicación parece que la prominencia visible del limbo de la Luna era lo suficientemente conspicua como para no pasarla por alto. Otros tres observadores tampoco lo pasaron por alto, a saber, el **Dr. Busch**, el **profesor Zornow** y **Wilhelm Bessel**; el instante de mayor claridad del fenómeno dado por cada uno de ellos coincidió estrechamente con el momento en que, según el cálculo posterior,

se produjo el siguiente contacto de los dos astros. Cuando los cuernos estaban más cerca uno del otro, calculé que su distancia (angular) era como máximo de **4 minutos**. Podría haber medido esta distancia más pequeña, pero como esperaba la formación completa del anillo, no creí apropiado hacer nada que pudiera haber puesto en peligro la observación de la duración del anillo, que era de esperar que fuera muy corta.

Por lo tanto, he visto, quizás de **15"** de largo, la parte del limbo de la Luna que se encuentra completamente entre las puntas de los cuernos, puntas individuales del mismo más largo. He visto las desigualdades de este limbo, las depresiones en una luz más fuerte, las elevaciones en una luz más débil. Esta luz era mucho más débil que la luz del disco del Sol, pero más fuerte que la luz de la Luna iluminada por el Sol. Esto último es evidente por la visibilidad de esta luz en los telescopios provistos de vidrios ahumados (filtros), en que la luz ordinaria de la Luna no podría haber penetrado. Para no dejar ninguna duda sobre esto, cito un experimento que he hecho, según la proporción de los tamaños aparentes de los discos del Sol y de la Luna, la Luna, en el instante del eclipse medio (máximo local), eclipsó aproximadamente las ocho novenas partes del Sol, de modo que el brillo que impartió a la atmósfera fue aproximadamente una novena parte del brillo que habría difundido si la Luna no lo hubiera oscurecido parcialmente. Por lo tanto, traté de ver si podía ver la Luna durante el día, hacia la hora de la puesta del Sol, cuando, como es bien sabido, la luz del día se debilita mucho más, con el mismo telescopio y el mismo vidrio ahumado.

Esto sucedió el **14 de septiembre (de 1836)**, y resultó que vi la Luna, cuyo limbo lo ubiqué en el medio del campo de visión del heliómetro del telescopio, no solo en el momento de la puesta del Sol, sino también en **la hora del 1° meridiano (de París), 18^h 39'**, 23 minutos después, no la pude ver. En este momento el intento fue

interrumpido por las nubes; pero fue lo suficientemente prolongado como para no dejar ninguna duda de que no pude haber visto la Luna iluminada por el Sol en el instante del eclipse máximo. Así que la luz que vi era mucho más fuerte que la luz de la Luna; tanto más, ya que lo encuentro en el mismo lugar del Sol, donde la iluminación de la atmósfera es más fuerte.

Lo que el **Sr. van Swinden**, con motivo del **eclipse solar del 7 de septiembre**, observado en **Ámsterdam** en **1820**, según la descripción dada en el **Volumen I** de los **Documentos de la Sociedad Astronómica**, parece haber sido el mismo que he observado ahora. Este eclipse tenía forma de **anillo** en **Ámsterdam**, pero una de las líneas paralelas entre las que se movía el disco lunar, o entre las que se movía el disco solar, lo atravesó tan cerca del limbo que la aparición del anillo duró solo unas tres cuartas partes de un minuto, aunque la diferencia de los radios de los dos astros, según el cálculo de **Sr. Moll**, fue de **1' 5,5"**. En estas circunstancias, el acercamiento de los limbos antes del comienzo del anillo, y su separación entre sí después de su final, ocurrió menos rápidamente que en otros, de modo que **Sr. van Swinden**, que precedió y siguió estos instantes, mucho más lentamente de lo que suele ser el caso de los eclipses anulares y totales. Esto le dio tiempo para conocer más de cerca el mismo fenómeno, que se manifestó en **Königsberg** durante un período de tiempo aún más largo, mientras que en (aquellas) otras circunstancias, por su curso muy rápido, tal vez no pueda captarse con suficiente certeza.

El **Sr. van Swinden** notó, como yo lo hice, un arco brillante que conectaba ambas puntas de los cuernos, pero no menciona las desigualdades del limbo lunar que he visto en él. La duración de este fenómeno en **Ámsterdam**, a pesar de la pequeñez del movimiento relativo de los dos limbos, fue muy corta, de modo que se manifestó solo "*inmediatamente antes de la formación del anillo*" y se formó

"*pocos instantes después*" del anillo y el arco desde allí había desaparecido, probablemente no hubo tiempo suficiente para prestar atención a todo lo que se dio en **Königsberg**, mientras que el curso del fenómeno fue aún más lento.

Por lo tanto, no creo que el hecho de no mencionar las desigualdades del limbo lunar pueda tomarse como una razón para dudar de la igualdad de las dos percepciones. Por otro lado, hay otra diferencia entre las dos descripciones, que necesita ser examinada con más detalle. Creo que vi la línea visible que une los dos cuernos corriendo a lo largo del limbo de la Luna misma, y de hecho no puedo tener dudas al respecto, ya que percibí las desigualdades de este limbo sobre el mismo; el **Sr. van Swinden** describe que tiene un radio de curvatura más pequeño que la Luna, de modo que en su centro se aleja del limbo de la Luna, mientras que en sus extremos coincide con ella.

No dice en qué se basa esta concepción de la figura de la línea. La observación inmediata del fenómeno no lo reveló, ya que no se veía nada más que la línea brillante, por lo que no se podía ver ningún espacio entre ella y el limbo de la Luna. Quizás el **Sr. van Swinden**, con un ojo perspicaz y experto, observó que la línea visible tenía una curvatura mayor que el limbo del Sol, lo cual, sin ningún espacio entre ella y el limbo lunar, ponderando el menor radio de curvatura de este último, debió ser el caso. La línea en realidad se estaba alejando del limbo del Sol, lo que puede haber dado lugar a la idea de que también se había alejado del limbo de la Luna. La correcta comprensión del dibujo adjunto a los artículos en las publicaciones de la **Sociedad Astronómica** es, además, sólo posible a través de la descripción a la que pertenece; pues esto requiere que lo que el dibujo representa como un espacio claro entre el limbo de la Luna y la línea visible, sea imaginado como oscuro. Después de examinar la aparente diferencia en las descripciones de ambas percepciones, no

creo que se haya visto nada diferente en **Ámsterdam** como en **Königsberg**. -El Sr. Greve, un segundo observador del mismo eclipse en **Ámsterdam**, no notó nada que pudiera señalar la distancia de la línea brillante desde limbo de la Luna; que, en la descripción de su percepción, la duración de la visibilidad de esta línea se da como de **dos minutos**, lo considero un error tipográfico o de imprenta, que se puede corregir en dos segundos **(I)**. Esta larga duración es al menos inconsistente con lo que el Sr. van Swinden y yo hemos visto; también con lo que el Sr. Greve notó inmediatamente antes y después de la formación de la línea brillante, durante un intervalo no especificado pero en cualquier caso muy corto.

De la declaración anterior del brillo de la línea que vi uniendo las puntas de los cuernos, parece que era demasiado brillante para ser explicado por la luz del Sol normalmente reflejada, y mucho menos por el crepúsculo lunar. Tampoco creo que sea concebible ningún otro tipo de curvatura de los rayos del Sol que pueda traer más luz al lado oscuro de la Luna que la que recibe directamente el que mira hacia el Sol.

Si se admite esto, nada parece quedar sino suponer que el Sol mismo posee una circunferencia de materia luminosa que no está oscurecida por el limbo de la Luna, que oscureció el disco del Sol mismo. La porción de esta circunferencia que se hizo visible en los dos eclipses anulares que acabamos de citar debe ser de muy pequeña extensión, mostrándose sólo cuando el limbo de la Luna apenas oscurecía el limbo del Sol. El hecho de que no se note en el limbo descubierto del Sol, se explica en parte por su pequeña longitud y en parte por su bajo brillo, en comparación con el brillo del propio disco solar.

Trataré de determinar a qué distancia del limbo del Sol estaba el limbo de la Luna mientras ocurría el fenómeno descrito. Pero

cualesquiera que sean los medios que se empleen para llegar al conocimiento de esta distancia, no se evita la dificultad que producen las irregularidades de la Luna, haciendo que la Luna no aparezca no como un círculo en todas partes sino aparece (como) una línea torcida (recortada suavemente) de supuesta figura.

Un dato que puede usarse para establecer un juicio sobre la distancia a los limbos, donde fue mayor, es la estimación de la distancia de los cuernos en el instante del eclipse medio. Si uno denota el radio aparente de la Luna en este instante por h , el del Sol por h' , y la distancia entre las puntas de los cuernos por $2 * d$, uno encuentra la distancia requerida entre los limbos:

$$= d^2 / (h + (h^2 - d^2)^{0,5}) - d^2 / (h' + (h'^2 - d^2)^{0,5})$$

Si uno escribe $h = 894,9''$, $h' = 948,7''$, $2 * d = 4'$ o $d = 120''$, esta fórmula arroja $0,46''$, que sería la cantidad hasta la cual el limbo de la Luna se alejaría del limbo del Sol si la figura supuesta, los radios supuestos de las tablas y la estimación de d , fuesen los correctos. De lo (descrito) en la última página no espero ningún aumento significativo en esta distancia, ya que la influencia de un error aceptable en la estimación no es considerable, y creo que he dado la distancia entre las puntas de los cuernos más bien demasiado grande que demasiado pequeña. Los radios de la Luna y del Sol tampoco aquí pueden producir un error considerable, donde una precisión de unos pocos cientos de segundos apenas puede ser de interés. Pero las deformaciones de la figura de la Luna con respecto a la (forma) circular pueden tener una influencia considerable, especialmente cuando los cuernos terminan en depresiones en el limbo de la Luna que implican una elevación del mismo: en este caso, la distancia del limbo de la Luna al limbo del Sol, dentro de la cual la línea de la luz era visible, podría ser mucho mayor que $0,46''$ a medida que la cresta se eleva por encima de la depresión.

También se puede pensar que si los limbos hubieran estado ligeramente más separados de lo que estaban, la línea de luz ya no hubiese pasado ininterrumpidamente de un cuerno al otro. He dado el tiempo anterior cuando la línea de luz perdió su conexión ininterrumpida (**16^h 53' 38,67" hora del meridiano de París**): si se promedia cuánto mayor fuera la distancia entre los limbos en este instante que en el momento de su distancia más pequeña, entonces esta diferencia es el ancho de la línea de luz en su centro que tiene lugar en el último momento. —Para conocer la hora de la distancia más pequeña entre los limbos y, por lo tanto, la hora intermedia entre estos y el instante en que los puntos individuales de la línea de luz se vuelven invisibles, calculé la observación (realizada) en **Königsberg** del comienzo y el final de la oscuridad con la intención de crear errores de los elementos de la oscuridad en gran medida a partir del resultado. Utilizando los valores de estos elementos, que en el apartado § 4 del tratado **X** han sido informados, y la relación del eje de la Tierra asumida allí = **300,7047 : 299,7047** he llegado a la expresión de la diferencia con el mediodía:

$$\text{Comienzo} \dots \omega = 13^{\text{h}} 12' 47,32'' + 2,159 * \varepsilon - 0,040 * \zeta + 2,158 * \eta$$

$$\text{Fin} \dots \omega = 13^{\text{h}} 12' 42,61'' + 2,159 * \varepsilon - 0,238 * \zeta + 2,173 * \eta$$

donde ε, ζ, η están representados por los tres primeros términos de la fórmula (113) del tratado citado (**Tratado X**), a saber los explicados

$$v * \varepsilon + v * \tan \psi * \zeta + v * \eta / \cos \psi$$

La mitad de la suma de estas expresiones, comparada con el valor conocido de $\omega = 13^{\text{h}} 12' 39''$, da la ecuación

$$0 = + 5,965'' + 2,159 * \varepsilon - 0,139 * \zeta - 0,0075 * \eta$$

Además tengo hallada la hora media de **Königsberg** de la menor distancia entre los limbos, por los mismos elementos,

$$16^{\text{h}} 53' 25,69'' - 2,405 * \varepsilon + 0,162 * \zeta$$

y si ε se elimina de esta expresión mediante la ecuación basada en las observaciones:

$$16^{\text{h}} 53' 32,33'' - 0,007 * \zeta - 0,008 * \eta$$

cuyo resultado es casi independiente de los elementos del eclipse y, a partir de la probable precisión de las observaciones, será casi correcto. Esta hora de la menor distancia entre los limbos fue seguida por la hora de la desaparición de puntos individuales de la línea de luz de solo **6,34"**, en cuya hora la distancia entre los limbos aumentó solo **0,06"**. Es evidente a partir de esto que la línea de luz, a mitad de camino entre los dos cuernos, se proyectó sólo unas pocas centésimas de segundo más allá del limbo de la Luna; así como de la conexión con la distancia previamente promediada de los dos márgenes (**0,46"**), que su extensión total apenas supera el medio segundo.

Dado que del cálculo anterior se desprende claramente que el **Observatorio de Königsberg** se encuentra casi exactamente en el límite (**Norte**), más allá del cual ya no se habría visto la línea de luz de manera continua, por lo que no es de extrañar que el eclipse haya aparecido anular en otras partes de la ciudad. Encontré por cálculo que la distancia entre los limbos cambiaba más rápidamente en una línea desde el observatorio cuyo azimut contado en el sentido de las agujas del reloj desde el **Norte** (fue) = **117° 40'**. Entre los muchos que han visto el eclipse en **Königsberg** a través de lentes ahumados (filtros) se encuentra un amigo mío atento y digno de confianza,

cuya casa está a **140°** de acimut y a **802 toesas (1.560,692 metros)** del observatorio; es decir, bastante cerca en la dirección del cambio más rápido en la distancia con los límites, y al mismo tiempo a una distancia tan considerable del observatorio que ya podría aparecer una diferencia notable en la apariencia. Cree, de hecho, que vio el anillo completamente formado "por un instante" y no está seguro de esto más que en la medida en que tuvo que confiar en el testimonio de sus propios ojos.

He calculado que, en el lugar indicado, el limbo de la Luna apareció **0,37"** más cerca del limbo del Sol que en el observatorio. Comparando esta percepción con otras similares hechas cerca del observatorio, se encontró igual de poco. Cuando a simple vista, apoyado por un telescopio, tuvo la idea del cierre del anillo, también se puede concluir que el limbo de la Luna, en el observatorio, estaba solo unas décimas de segundo más allá del limbo del Sol.

Todo lo que he dicho sobre el eclipse se combina así para demostrar que la línea de luz a menudo mencionada se hace visible sólo cuando el limbo de la Luna está dentro de aproximadamente medio segundo del limbo del Sol; también que un valor considerablemente mayor de este límite, por ejemplo de un segundo entero, es improbable.

-Por lo que se ha dicho más arriba sobre el grado de brillo de esta línea, me parece que sólo puede explicarse suponiendo que una masa luminosa rodea al Sol, cuya intensidad luminosa disminuye tan rápidamente con la distancia que en el grado de luz diurno, que dejaron ambos eclipses anulares, solo se pudo ver la parte que estaba dentro de aproximadamente medio segundo del limbo del Sol.

- (I) La indicación es "2' de tiempo", por lo que para eliminar la dificultad solo fue necesario configurar el segundo signo, en lugar del minuto.

Observación del eclipse solar total del 15 de mayo de 1836



Bibliografía & Enlaces

“Astronomische Untersuchungen”. Band 1 und 2 -
Colección de *e-rara*, provisto por *ETH-Bibliothek Zürich, Rar 1579*:
<https://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-14370?lang=en>

Planilla de cálculo. “Friedrich Wilhelm Bessel. Cálculo del eclipse solar anular del 15.05.1836”:
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1EmPNVYCGXNeu7cwN5AaCKV6ZnonMO6tc/edit?usp=share_link&oid=108981343127313138621&rtpof=true&sd=true

“Cálculo de un Eclipse Solar y Lunar. Ocultación y Tránsito”:
https://es.wikibooks.org/wiki/Cálculo_de_un_Eclipse_Solar_y_Lunar._Ocultación_y_Tránsito

